Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10)

20. August 2014, 14-17 Uhr, HIL F15

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte Beachten Sie:

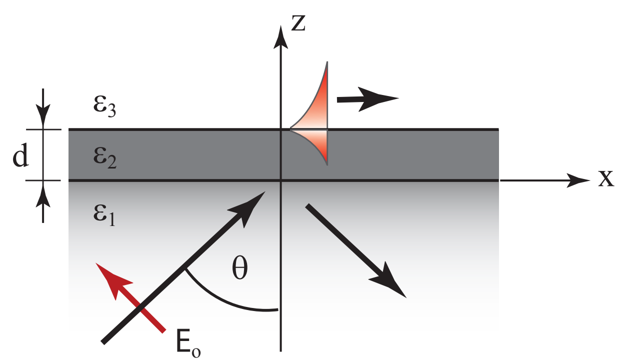
- Diese Prüfung besteht aus 4 Aufgaben und hat 2 beidseitig bedruckte Seiten exklusive dieses Deckblatts. Sie haben 3 Stunden Zeit, um die Aufgaben zu lösen.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **10 beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Keine Bücher, Vorlesungsmaterialien, Taschenrechner, Handys, oder Computer!
- Geben Sie dieses Blatt als Deckblatt für Ihre Lösungen ab.
- Die Zwischenrechnungen müssen angegeben werden und die Lösungen sind zu begründen.
- Benutzen Sie bitte kein rotes Schreibzeug (Korrekturfarbe).
- Schreiben Sie **nicht auf die Aufgabenblätter** (wird nicht korrigiert).
- Vergessen Sie nicht, **jedes Blatt mit Ihrem Namen** zu versehen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige weitere Hinweise von allgemeinem Interesse (Korrekturen von Schreibfehlern, etc.) werden während der Prüfung an die Wandtafel geschrieben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	**Punkte**	**Visum**
1		
2		
3		
4		
Total:		

1 Anregung von Oberflächenwellen (30 Punkte)

Eine ebene p-polarisierte Welle mit Frequenz ω und Amplitude E_0 trifft aus einem dielektrischen Medium 1 mit Permittivität ε_1 auf eine Grenzfläche, die mit einem Film der Dicke d beschichtet ist (siehe Abbildung). Die Permittivität des Filmes (Medium 2) ist ε_2. Über dem Film befindet sich das dielektrische Medium 3 mit Permittivität $\varepsilon_3 < \varepsilon_1$. Die Medien sind nicht magnetisch ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$). Der Einfallswinkel der ebenen Welle bezüglich der Oberflächennormalen ist θ. Unser Ziel ist, eine Oberflächenwelle anzuregen, die auf der oberen Grenzfläche des Filmes propagiert.



1. (3 Punkte) Für welche Einfallswinkel θ ist das Feld im oberen Medium 3 evaneszent?

2. (2 Punkte) Eine Oberflächenwelle muss auf beiden Seiten der Grenzfläche exponentiell abfallen. Zeigen Sie, dass im Fall $\varepsilon_2 < 0$ das Feld für beliebige Einfallswinkel θ im Film (Medium 2) exponentiell abklingt.

3. (4 Punkte) Schreiben Sie das einfallende elektrische Feld $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ in Vektorform. Verwenden Sie das Koordinatensystem, das in der Abbildung definiert ist.

4. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der räumliche Teil des in Teilaufgabe 3 gefundenen Feldes die Helmholtz Gleichung erfüllt und divergenzfrei ist.

5. (4 Punkte) Berechnen Sie das einfallende Magnetfeld $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t)$ im Medium 1. Drücken Sie die Amplitude des Magnetfeldes H_0 durch die Amplitude des elektrischen Feldes E_0 aus.

6. (5 Punkte) Wir betrachten nun die Grenzfläche ohne Film ($d = 0$). Die Amplitude des reflektierten elektrischen Feldes sei E_r und die des transmittierten elektrischen Feldes E_t. Schreiben Sie das reflektierte und transmittierte $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ Feld in Vektorform. Verwenden Sie das Koordinatensystem, das in der Abbildung definiert ist, und drücken Sie alle Winkel durch k_x, k_{z_1}, und k_{z_3} aus. Drücken Sie ausserdem die Magnetfeldamplituden H_r und H_t durch E_r und E_t aus.

7. (5 Punkte) Schreiben Sie die Randbedingungen für den Fall $d = 0$. Wieviele unbekannte Parameter gibt es insgesamt? Leiten Sie ein Gleichungssystem für die unbekannten Parameter in Matrixform her.

8. (2 Punkte) Wieviele unbekannte Parameter gibt es für den Fall einer endlichen Filmdicke ($d \neq 0$)? Wieviele Randbedingungen brauchen Sie, um das Problem zu lösen?

9. (3 Punkte) Man kann zeigen, dass die einfallende Welle maximal an die Oberflächenwelle ankoppelt, wenn der Fresnel Reflexionskoeffizient für die Grenzfläche zwischen Medien 2 und 3

$$r^p_{2,3}(\theta) \;=\; \frac{\epsilon_3\, k_{z_2} \;-\; \epsilon_2\, k_{z_3}}{\epsilon_3\, k_{z_2} \;+\; \epsilon_2\, k_{z_3}}$$

divergiert. Die Bedingung $r^p_{2,3} \rightarrow \infty$ bedeutet, dass $\epsilon_3\, k_{z_2} + \epsilon_2\, k_{z_3} = 0$ sein muss. Schreiben Sie k_{z_2} und k_{z_3} als Funktion von $k_x(\theta)$ und bestimmen Sie dann den Einfallswinkel θ, unter welchem die Oberflächenwelle angeregt werden kann.

2 Lorentz'scher Lichtpuls (15 Punkte)

Wir betrachten einen Lichtpuls im Vakuum, der zum Zeitpunkt $t = 0$ entlang der z-Achse durch

$$\mathbf{E}(x=0, y=0, z, t=0) \;=\; \frac{E_0}{1+(z/z_0)^2}\,\cos\!\Big(\frac{\omega_0}{c}\,z\Big)\;\mathbf{n}_x$$

beschrieben wird. Hier ist c die Lichtgeschwindigkeit und E_0, z_0 und ω_0 sind reelle Konstanten.

1. (3 Punkte) Bestimmen Sie das Feld $\mathbf{E}(x=0, y=0, z, t)$ für beliebige Zeiten t. Gehen Sie davon aus, dass der Puls sich in $+z$-Richtung bewegt.

2. (3 Punkte) Formulieren Sie zwei Differentialgleichungen, denen das Feld $\mathbf{E}(x=0, y=0, z, t)$ genügen muss. Keine Rechnung erforderlich.

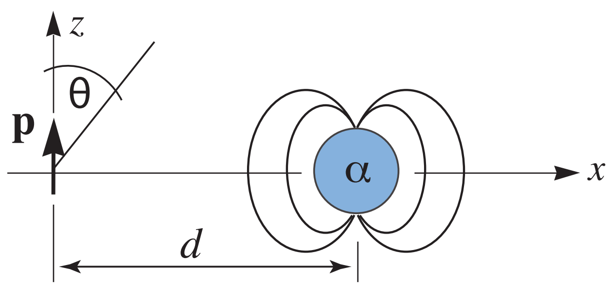
3. (9 Punkte) Berechnen Sie das Frequenzspektrum $\hat{\mathbf{E}}(z, \omega)$ und skizzieren Sie $\hat{\mathbf{E}}(z=0, \omega)$.

   Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+(x/x_o)^2)}\,\exp[\mathrm{i}\alpha x]\,dx \;=\; \frac{\pi\, x_o}{2}\,\big[\exp(-x_o|\alpha-1|) \;+\; \exp(-x_o|\alpha+1|)\big]\;.$$

3 Abstrahlung nahe einer dielektrischen Kugel (30 Punkte)

Wir betrachten eine Antenne im Vakuum, die sich am Koordinatenursprung befindet. Die Stromverteilung der Antenne kann durch einen zeitharmonischen elektrischen Dipol $\mathbf{p} = p\mathbf{n}_z$ mit Kreisfrequenz ω approximiert werden. In einem Abstand d entlang der x-Achse befindet sich eine kleine dielektrische Kugel (Radius $a \ll \lambda$, mit Wellenlänge λ) mit der isotropen und reellen Polarisierbarkeit α (siehe Abbildung). Der Winkel θ bezeichnet den Abstrahlwinkel relativ zur Dipolachse. Wir betrachten im Folgenden lediglich die xz-Ebene, das heisst, $y = 0$ bzw. $\phi = 0$.



1. (3 Punkte) Berechnen Sie das Feld $\mathbf{E}$ der Antenne am Ort der Kugel und bestimmen Sie den darin induzierten Dipol $\mathbf{p}_{\mathrm{ind}}$.

2. (5 Punkte) Verwenden Sie die Fraunhofer Näherung, um das elektrische Fernfeld $\mathbf{E}_\infty^{\mathrm{ind}}(r, \theta; d, p)$ zu berechnen, das von der streuenden Kugel emittiert wird.

3. (7 Punkte) Berechnen Sie nun das gesamte Fernfeld $\mathbf{E}_\infty^{\mathrm{tot}}(r, \theta, p, d)$, erzeugt durch Antenne und Kugel. Nehmen Sie an, dass der Abstand zwischen Antenne und Kugel viel grösser ist als die Wellenlänge ($d \gg \lambda$). Bestimmen Sie die Winkel θ, unter denen im Fernfeld $\mathbf{E}_\infty^{\mathrm{tot}}$ konstruktive Interferenz zwischen primärem und gestreutem Feld eintritt. Berechnen Sie die Zahlenwerte für alle diese Winkel im ersten Quadranten ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) für den Fall $d = 2\lambda$.

4. (3 Punkte) Wenn Sie unter dem Winkel θ_1 im ersten Quadranten ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) konstruktive Interferenz im Fernfeld beobachten, unter welchen weiteren Winkeln werden Sie dann ebenfalls konstruktive Interferenz beobachten? Benutzen Sie die Symmetrie des Problems, um diese Frage zu beantworten.

5. (3 Punkte) Berechnen Sie die von der Kugel gestreute Leistung P_s. Nehmen Sie an, dass $d \gg \lambda$ gilt.

6. (3 Punkte) Berechnen Sie das Feld $\mathbf{E}_{\mathrm{ind}}(\mathbf{r} = 0)$, das durch den in der Kugel induzierten Dipol am Ort des primären Dipols $\mathbf{p}$ generiert wird. Nehmen Sie an, dass $d \gg \lambda$ gilt.

7. (6 Punkte) Berechnen Sie die normierte Dipolstrahlung P/P_0 als Funktion von d, wobei P_0 die Leistung ist, die von der Antenne in Abwesenheit der Kugel abgestrahlt wird und P die Leistung, die in Anwesenheit der Kugel abgestrahlt wird. Nehmen Sie an, dass $d \gg \lambda$ gilt.

4 Ausbreitung und Beugung von Feldern (25 Punkte)

Zwei Antennen senden elektromagnetische Strahlung der Wellenlänge λ aus. In der Ebene $z = 0$ ist das Feld gegeben durch

$$\mathbf{E}_1(x, y, z = 0) = \begin{cases} \mathbf{E}_0 & : -\beta < y < \beta \text{ und } -\alpha < (x - x_0) < \alpha \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_2(x, y, z = 0) = \begin{cases} \mathbf{E}_0\, e^{i\phi} & : -\beta < y < \beta \text{ und } -\alpha < (x + x_0) < \alpha \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $k = 2\pi/\lambda$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x_0 > 0$, und ϕ ist eine reelle Zahl.

1. (2 Punkte) Bestimmen Sie die Distanz $z = z_0$, ab welcher die Fraunhofer Näherung gültig ist.

2. (2 Punkte) Beschreiben Sie, welche Näherung für $z < z_0$ berücksichtigt werden muss und was der Unterschied zur Fraunhofer Näherung ist. Welche Form haben die Wellenfronten in der Fraunhofer Näherung und welche in der gesuchten (besseren) Näherung? Keine Rechnung erforderlich.

3. (6 Punkte) Berechnen Sie die Feldwinkelspektren $\hat{\mathbf{E}}_1(k_x, k_y, z = 0)$ und $\hat{\mathbf{E}}_2(k_x, k_y, z = 0)$.

4. (4 Punkte) Berechnen Sie das gesamte Fernfeld $\mathbf{E}_\infty = \mathbf{E}_{\infty,1} + \mathbf{E}_{\infty,2}$, und schreiben Sie es in kartesischen Koordinaten (x, y, z).

5. (8 Punkte) Die Felder der Antennen sind für eine feste Phasenbeziehung ϕ kohärent. Im Allgemeinen ist jedoch die Phasenbeziehung ϕ nicht fest, sondern variiert mit der Zeit. In diesem Fall ist das Feld teilweise kohärent. Beschreiben Sie die Intensität I_{coh} im Fernfeld für den rein kohärenten Fall und die Intensität I_{inc} für den rein inkohärenten Fall. Berechnen Sie das Verhältnis zwischen den Intensitäten $I_{\text{coh}}/I_{\text{inc}}$.

6. (3 Punkte) Wenn die Phase ϕ geändert wird, was passiert mit der Intensitätsverteilung im Fernfeld im kohärenten Fall? Was geschieht im inkohärenten Fall? Keine Rechnung erforderlich.