

Datum: 13.04.2016

Zwischenprüfung

1 Mathematische Grundlagen (35 Pkt.)

1. (1 Pkt.) Für das Betragsquadrat $|c|^2$ einer komplexen Zahl $c \in \mathbb{C}$ gilt

- $|c|^2 = c^2$,
- $|c|^2 = c^*c$,
- $|c|^2 = \text{Im}(c) + \text{Re}(c)$,
- keiner der angegebenen Vorschläge.

2. (1 Pkt.) Für das Betragsquadrat $|a + b|^2$ der Summe zweier komplexer Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ gilt

- $|a + b|^2 = a^2 + b^2 + 2ab$,
- $|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2$,
- $|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\text{Re}(ab^*)$,
- keiner der angegebenen Vorschläge.

3. (1 Pkt.) Für den Phasenwinkel einer komplexen Zahl $c = |c| e^{i\phi}$ gilt

- $\phi = \arctan \frac{\text{Im}(c)}{\text{Re}(c)}$,
- $\phi = \arctan(c)$,
- $\phi = \cos(c + c^*)$,
- keiner der angegebenen Vorschläge.

Hinweis zur Lösung: Unter einer strikten Definition des \arctan ist der erste Vorschlag ausserhalb des ersten Quadranten nicht korrekt. In der Korrektur wurden jedoch sowohl der erste als auch der letzte Vorschlag als korrekt gewertet.

4. (1 Pkt.) Für eine komplexe Zahl $c = |c| e^{i\phi}$ gilt

- $\frac{c}{c^*} = e^{i\phi}$,
- $\frac{c}{c^*} = 2\text{Re}(c)$,
- $\frac{c}{c^*} = e^{2i\phi}$,
- keiner der angegebenen Vorschläge.

Unterschrift Student/-in: _____

5. (1 Pkt.) Für den Realteil einer komplexen Zahl $c \in \mathbb{C}$ gilt

- $\operatorname{Re}(c) = \frac{-i}{2}(c + c^*),$
- $\operatorname{Re}(c) = \frac{i}{2}(c + c^*),$
- $\operatorname{Re}(c) = \frac{1}{2}(c + c^*),$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

6. (1 Pkt.) Es gilt

- $e^{i\pi/2} = -i,$
- $e^{i\pi/2} = i,$
- $e^{i\pi/2} = i/2,$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

7. (1 Pkt.) Es gilt

- $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - 1),$
- $\sqrt{i} = -1,$
- $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i),$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

8. (1 Pkt.) Es gilt

- $e^{-i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi,$
- $e^{-i\phi} = \cos \phi - i \sin \phi,$
- $e^{-i\phi} = \sin \phi - i \cos \phi,$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

9. (1 Pkt.) Es gilt

- $e^\alpha \cdot e^{-\beta} = e^{\beta-\alpha},$
- $e^\alpha \cdot e^{-\beta} = e^{\alpha/\beta},$
- $e^\alpha \cdot e^{-\beta} = e^{-\alpha \cdot \beta},$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

10. (1 Pkt.) Es gilt

- $1/e^{-\alpha} = -e^\alpha,$
- $1/e^{-\alpha} = e^\alpha,$
- $1/e^{-\alpha} = e^{(1/\alpha)},$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

11. (1 Pkt.) Es gilt

- $(a^b)^c = a^{bc}$,
- $(a^b)^c = a^{(b^c)}$,
- $(a^b)^c = (ac)^b$,
- keiner der angegebenen Vorschläge.

12. (1 Pkt.) Formulieren Sie die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x) = 4 + 3x + 2(x - 2)^2 + (x - 3)^3$ am Punkt $x = 3$

- $\frac{d}{dx} f(x = 3) = \boxed{7}$

13. (2 Pkt.) Formulieren Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(ax) \cos(bx)$

- $\frac{d}{dx} f(x) = \boxed{a \cos(ax) \cos(bx) - b \sin(ax) \sin(bx)}$

14. (2 Pkt.) Das bestimmte Integral der Funktion $f(x) = e^{-kx}$ lautet für $k > 0$

- $\int_0^{\infty} dx f(x) = \boxed{1/k}$

15. (2 Pkt.) Es gilt

- $\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin x = \boxed{0}$

16. (2 Pkt.) Es gilt

- $\int_0^{\pi} dx \sin^2 x = \boxed{\pi/2}$

17. (3 Pkt.) Die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ um $x_0 = 0$ lautet bis zur zweiten Ordnung

- $f(x) = \boxed{1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}}$ + $\mathcal{O}(x^3)$.

18. (2 Pkt.) Mit $\mathbf{r} = (x, y, z)$ gilt für den Gradienten

- $\nabla |\mathbf{r}|^2 = 2 |\mathbf{r}|,$
- $\nabla |\mathbf{r}|^2 = 2\mathbf{r},$
- $\nabla |\mathbf{r}|^2 = 2 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

19. (3 Pkt.) Mit dem Laplace-Operator ∇^2 gilt für das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin x + \cos y \\ \cos x + \sin y \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\nabla^2 \mathbf{F} = -\sin x - \sin y,$
- $\nabla^2 \mathbf{F} = (-\sin x, -\cos x, 0)^T,$
- $\nabla^2 \mathbf{F} = (-\sin x - \cos y, -\cos x - \sin y, 0)^T,$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

20. (2 Pkt.) Mit dem Laplace-Operator ∇^2 gilt für das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$

- $\nabla^2 \mathbf{F} = (2, 2, 2)^T,$
- $\nabla^2 \mathbf{F} = (0, 0, 0)^T,$
- $\nabla^2 \mathbf{F} = 2,$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

21. (5 Pkt.) Die Rechtecksfunktion sei definiert als

$$\text{rect}(\omega, \omega_0, \Delta) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega_0 - \Delta < \omega < \omega_0 + \Delta, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Die Fouriertransformation der Funktion $\hat{f}(\omega)$ sei definiert als

$$f(t) = \mathcal{FT} \{ \hat{f}(\omega) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Die Fouriertransformation der Rechtecksfunktion lautet

- $\mathcal{FT} \{ \text{rect}(\omega, \omega_0, \Delta) \} = \frac{2}{t} \sin(\Delta t),$
- $\mathcal{FT} \{ \text{rect}(\omega, \omega_0, \Delta) \} = \frac{2}{t} e^{-i\omega_0 t} \sin(\Delta t),$
- $\mathcal{FT} \{ \text{rect}(\omega, \omega_0, \Delta) \} = \frac{2}{t} e^{-i\omega_0 t} e^{i\Delta t},$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

2 Elektromagnetische Felder und Wellen (65 Pkt.)

1. (2 Pkt.) Die Dispersionsrelation in einem Medium mit Brechungsindex n lautet

- $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = n^2 \frac{\omega^2}{c^2},$
- $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$
- $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = n \frac{\omega^2}{c^2},$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

2. (2 Pkt.) Der Brechungsindex ist definiert als

- $n = (\varepsilon\mu)^2,$
- $n = \varepsilon\mu,$
- $n = \sqrt{\varepsilon\mu},$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

3. (2 Pkt.) Für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum gilt

- $c = \sqrt{\mu\varepsilon},$
- $c = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0},$
- $c = (\mu_0\varepsilon_0)^2,$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

4. (2 Pkt.) Für die Lichtgeschwindigkeit im Medium mit Brechungsindex n gilt

- $c' = 1/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0},$
- $c' = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0},$
- $c' = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0,$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

5. (2 Pkt.) Die (quellfreie) Helmholtzgleichung für das komplexe Magnetfeld lautet

- $\nabla^2 \mathbf{H} + \frac{1}{c^2} \mathbf{H} = 0,$
- $\nabla^2 \mathbf{H} + \mu\mu_0 \mathbf{H} = 0,$
- $\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0,$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

6. (3 Pkt.) Das komplexe elektrische Feld einer y -polarisierten und in z -Richtung propagierenden monochromatischen ebenen Welle lautet

- $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikx},$
- $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iky},$
- $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \operatorname{Re}\{E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}\},$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

7. (2 Pkt.) Für die komplexen elektrischen und magnetischen Felder einer ebenen Welle gilt

- $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{k},$
- $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0,$
- $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{n} |\mathbf{E}|^2,$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

8. (3 Pkt.) Für das komplexe magnetische Feld einer ebenen Welle mit Wellenvektor \mathbf{k} gilt

- $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}),$
- $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega\mu_0\mu} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}),$
- $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega\mu_0\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}),$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

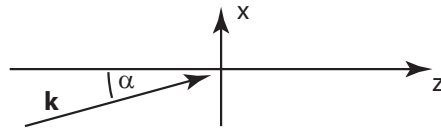
9. (3 Pkt.) Betrachten Sie das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (i + 1)\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ mit $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{R}^3$. Wie lautet das dazugehörige reelle Feld?

- $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 [\cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) - \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)],$
- $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 [\cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t) + \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)],$
- $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 [-\cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) + \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)],$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

10. (3 Pkt.) Betrachten Sie das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (i + 1)\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ mit $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{R}^3$ im Vakuum. Wie lautet die Intensität in der Ebene $z = 0$?

- $I(z = 0) = \frac{1}{Z_0} |\mathbf{E}_0|^2,$
- $I(z = 0) = \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{E}_0|^2,$
- $I(z = 0) = \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{E}_0|^2 \cos(kx),$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

11. (5 Pkt.) Wie lautet das komplexe elektrische Feld einer in der xz -Ebene unter dem Winkel α zur z -Achse propagierenden ebenen Welle, die in der xz -Ebene polarisiert ist?



- $\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik(x \sin \alpha + z \cos \alpha)},$
- $\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} e^{ik(x \sin \alpha + z \cos \alpha)},$
- $\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix} e^{ik(x \sin \alpha + z \cos \alpha)},$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

12. (2 Pkt.) Eine in der xz -Ebene unter dem Winkel α zur z -Achse propagierende ebene Welle, die in der xz -Ebene polarisiert ist, ist bezüglich einer Grenzfläche in der Ebene $z = 0$

- s-polarisiert,
- p-polarisiert,
- i-polarisiert,
- keiner der angegebenen Vorschläge.

13. (2 Pkt.) Die Wellengleichung im Vakuum lautet

- $\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0,$
- $\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0,$
- $\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0,$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

14. Betrachten Sie eine ebene Welle vom Typ $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{ikz}$

(a) (2 Pkt.) Für $\mathbf{E}_0 = (i, -i, 0)^T$ gilt

- die Welle ist linear polarisiert,
- die Welle ist zirkular polarisiert,
- die Welle erfüllt die Maxwell'schen Gleichungen nicht,
- keiner der angegebenen Vorschläge.

(b) (2 Pkt.) Für $\mathbf{E}_0 = (0, 1, 1)^T$ gilt

- die Welle ist linear polarisiert,
- die Welle ist zirkular polarisiert,
- die Welle erfüllt die Maxwell'schen Gleichungen nicht,
- keiner der angegebenen Vorschläge.

(c) (2 Pkt.) Für $\mathbf{E}_0 = (1 + i, 1 - i, 0)^T$ gilt

- die Welle ist linear polarisiert,
- die Welle ist zirkular polarisiert,
- die Welle erfüllt die Maxwell'schen Gleichungen nicht,
- keiner der angegebenen Vorschläge.

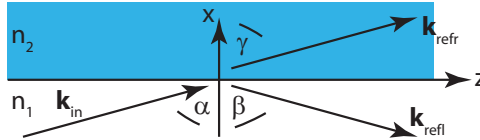
15. (4 Pkt.) Ein elektromagnetischer Puls propagiere im Vakuum in positive x -Richtung und sei y -polarisiert. Zum Zeitpunkt $t = 0$ laute die y -Komponente des Feldes

$$E_y(x, t = 0) = \frac{E_0 a^2}{(x - x_0)^2 - \gamma^2} \cos(kx).$$

Zu einem beliebigen Zeitpunkt t lautet die y -Komponente des Feldes

- $E_y(x, t) = \frac{E_0 a^2}{[x - (x_0 + ct)]^2 - \gamma^2} \cos(kx - kct),$
- $E_y(x, t) = \frac{E_0 a^2}{[x - (x_0 - ct)]^2 - \gamma^2} \cos(kx + kct),$
- $E_y(x, t) = \frac{E_0 a^2}{[x - (x_0 + ct)]^2 - \gamma^2} e^{i(kx - \omega t)},$
- keiner der angegebenen Vorschläge.

16. Eine ebene Welle propagiere unter dem Winkel α zur x -Achse auf eine Grenzfläche bei $x = 0$ zu. Im Bereich $x > 0$ sei der Brechungsindex n_2 , im Bereich $x < 0$ sei er $n_1 < n_2$. Es entsteht eine reflektierte Welle mit Wellenvektor \mathbf{k}_{refl} und eine gebrochene Welle mit Wellenvektor \mathbf{k}_{refr} , wie unten skizziert.



- (a) (2 Pkt.) Es gilt

- $\alpha > \beta$,
 $\alpha < \beta$,
 $\alpha = \beta$,
 keiner der angegebenen Vorschläge.

- (b) (2 Pkt.) Es gilt

- $\alpha > \gamma$,
 $\alpha < \gamma$,
 $\alpha = \gamma$,
 keiner der angegebenen Vorschläge.

- (c) (2 Pkt.) Es kommt zu Totalreflexion wenn gilt

- $\alpha > \arcsin(n_2/n_1)$,
 $\alpha > \arcsin(n_1/n_2)$,
 $\alpha > \arcsin(n_2 n_1)$,
 keiner der angegebenen Vorschläge.

- (d) (2 Pkt.) Wir bezeichnen die x -Komponente des Vektors \mathbf{k} mit k_x . Es gilt

- $k_{\text{in},x} = -k_{\text{refl},x}$,
 $k_{\text{in},x} = (n_1/n_2)k_{\text{refl},x}$,
 $k_{\text{in},x} = (n_2/n_1)k_{\text{refl},x}$,
 keiner der angegebenen Vorschläge.

- (e) (2 Pkt.) Wir bezeichnen die z -Komponente des Vektors \mathbf{k} mit k_z . Es gilt

- $k_{\text{in},z} < k_{\text{refr},z}$,
 $k_{\text{in},z} = (n_2/n_1)k_{\text{refl},z}$,
 $k_{\text{in},z} = k_{\text{refr},z}$,
 keiner der angegebenen Vorschläge.

17. An Grenzflächen gilt allgemein aufgrund der Randbedingungen in Abwesenheit von Oberflächenladungen und -strömen

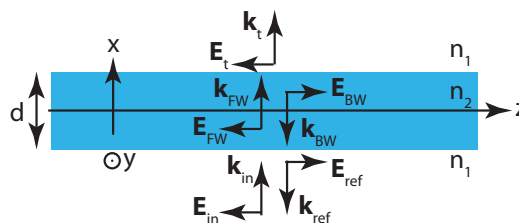
(a) (2 Pkt.)

- Parallel- und Normalkomponente des \mathbf{H} -Feldes sind an Grenzflächen erhalten,
- die Parallelkomponente des \mathbf{H} -Feldes ist an Grenzflächen erhalten,
- die Normalkomponente des \mathbf{H} -Feldes ist an Grenzflächen erhalten,
- keiner der angegebenen Vorschläge.

(b) (2 Pkt.)

- Parallel- und Normalkomponente des \mathbf{E} -Feldes sind an Grenzflächen erhalten,
- die Normalkomponente des \mathbf{E} -Feldes ist an Grenzflächen erhalten,
- die Parallelkomponente des \mathbf{E} -Feldes ist an Grenzflächen erhalten,
- keiner der angegebenen Vorschläge.

18. Eine z -polarisierte Welle propagiere entlang der x -Achse durch ein dielektrisches Material (ohne freie Oberflächenladungen oder Ströme) mit Brechungsindex n_1 und treffe in der Ebene $x = -d/2$ auf ein Material mit Brechungsindex n_2 , das sich bis zur Ebene $x = d/2$ erstrecke. Es bezeichne k_i die Wellenzahl im Medium i . Alle Felder seien von der Gestalt $\mathbf{E}_i e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$ mit $\mathbf{E}_i = \text{const.}$ und Orientierung wie in folgender Skizze. Die einfallende Welle habe die komplexe Amplitude \mathbf{E}_{in} , die reflektierte Welle Amplitude \mathbf{E}_{ref} , die transmittierte Welle \mathbf{E}_{t} . Die in der Schicht in positive x -Richtung propagierende Welle habe die komplexe Amplitude \mathbf{E}_{FW} , jene in negative x -Richtung propagierende die komplexe Amplitude \mathbf{E}_{BW} .



(a) (4 Pkt.) Es gilt aufgrund der Randbedingungen

- $\mathbf{E}_{\text{FW}} e^{-ik_2 d/2} + \mathbf{E}_{\text{in}} e^{ik_1 d/2} = \mathbf{E}_{\text{BW}} e^{-ik_2 d/2} + \mathbf{E}_{\text{ref}} e^{ik_1 d/2}$,
- $\mathbf{E}_{\text{FW}} e^{-ik_2 d/2} + \mathbf{E}_{\text{BW}} e^{ik_2 d/2} = \mathbf{E}_{\text{in}} e^{-ik_1 d/2} + \mathbf{E}_{\text{ref}} e^{ik_1 d/2}$,
- $\mathbf{E}_{\text{FW}} + \mathbf{E}_{\text{BW}} = \mathbf{E}_{\text{in}} + \mathbf{E}_{\text{ref}}$,
- keiner der angegebenen Vorschläge.

(b) (4 Pkt.) Es gilt aufgrund der Randbedingungen mit der Wellenimpedanz Z_i im Medium i

- $\frac{1}{Z_2} \{ \mathbf{E}_{\text{FW}} e^{-ik_2 d/2} + \mathbf{E}_{\text{BW}} e^{ik_2 d/2} \} = \frac{1}{Z_1} \{ \mathbf{E}_{\text{in}} e^{-ik_1 d/2} + \mathbf{E}_{\text{ref}} e^{ik_1 d/2} \}$,
- $\frac{1}{Z_2} \{ \mathbf{E}_{\text{FW}} e^{-ik_2 d/2} - \mathbf{E}_{\text{BW}} e^{ik_2 d/2} \} = \frac{1}{Z_1} \{ \mathbf{E}_{\text{in}} e^{-ik_1 d/2} - \mathbf{E}_{\text{ref}} e^{ik_1 d/2} \}$,
- $\frac{1}{Z_2} \{ \mathbf{E}_{\text{FW}} + \mathbf{E}_{\text{BW}} \} = \frac{1}{Z_1} \{ \mathbf{E}_{\text{in}} + \mathbf{E}_{\text{ref}} \}$,
- keiner der angegebenen Vorschläge.

