xxx **xxxx**
xx-xxx-xxx, xxxxx
xxx@student.ethz.ch
Lfd.Nr.: x/xx

Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10S)

28. Januar 2021, 14:00-17:00 Uhr, HG D 1.1

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte beachten Sie:

- Diese Prüfung besteht aus 3 Aufgaben. Die Angabe umfasst 3 beidseitig bedruckte Blätter (6 Seiten) exklusive dieses Deckblatts. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **3 eigenhändig beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Bücher, Vorlesungsmaterialien, ausgedruckte Dokumente und elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.
- Geben Sie dieses Deckblatt für Ihre Lösungen mit ab. Unterschreiben Sie dieses Deckblatt.
- Lösungen sind nachvollziehbar zu begründen. Nicht eindeutig lesbare Passagen bleiben unbewertet. Nicht eindeutig zuzuordnende Passagen bleiben ebenso unbewertet!
- Benutzen Sie einen dokumentenechten schwarzen oder blauen Stift (**kein Rotstift, kein radierbarer Stift**). Verwenden Sie keine Korrekturhilfen (z.B. Tipp-Ex oder Tintenlöscher). **Mit Korrekturhilfen oder radierbarem Stift bearbeitete Passagen bleiben unbewertet!**
- Lösungen auf Angabenblättern oder Deckblatt bleiben unbewertet!
- Verwenden Sie Ihr mitgebrachtes Papier im Format A4 für Ihre Lösungen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige weitere Hinweise von allgemeinem Interesse werden während der Prüfung mitgeteilt.

Viel Erfolg!

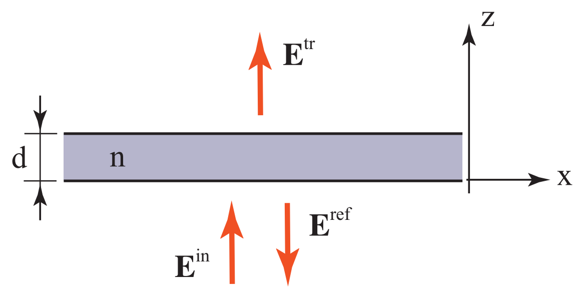
Unterschrift Student/-in: ____________________________

Aufgabe	Punkte	Visum Korrektor
1	/35	
2	/35	
3	/30	
Total:	/100	

Rückseite Deckblatt, leer

1 Transmission durch einen Film (35 Punkte)

Eine monochromatische ebene Welle (Kreisfrequenz ω) trifft senkrecht auf einen dielektrischen Film mit Brechungsindex n und Dicke d. Der Film ist unmagnetisch ($\mu = 1$) und von Vakuum umgeben.



Das komplexe einfallende elektrische Feld ist

$$\underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{in}}(\mathbf{r}) = E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{ik_0 z},$$

wobei E_0 reell ist.

1. (1 Punkt) Wie lautet das entsprechende reelle Feld $\mathbf{E}^{\mathrm{in}}(\mathbf{r}, t)$?
2. (2 Punkte) Benutzen Sie die Wellengleichung um die Dispersionsrelation $k_0(\omega)$ herzuleiten.
3. (2 Punkte) Bestimmen Sie das komplexe magnetische Feld $\underline{\mathbf{H}}^{\mathrm{in}}(\mathbf{r})$ der einfallenden Welle.
4. (2 Punkte) Bestimmen Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)\rangle$ und die Intensität $I(\mathbf{r})$ der einfallenden Welle.

Das Feld, das vom Film reflektiert wird, ist

$$\underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{ref}}(\mathbf{r}) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-ik_0 z},$$

und für das Feld im Innern des Films schreiben wir

$$\underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{film}}(\mathbf{r}) = B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{ikz} + C \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-ikz},$$

wobei A, B, und C komplexe Amplituden sind.

5. (4 Punkte) Bestimmen Sie die zugehörigen magnetischen Felder $\underline{\mathbf{H}}^{\mathrm{ref}}$ und $\underline{\mathbf{H}}^{\mathrm{film}}$, sowie die Dispersionsrelation im Innern des Films $k(\omega)$.
6. (2 Punkte) Anhand der Randbedingungen für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ bei $z = 0$ bestimmen Sie zwei Gleichungen für A, B und C.

7. (4 Punkte) Unter Berücksichtigung der transmittierten Felder $\underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{tr}}$ und $\underline{\mathbf{H}}^{\mathrm{tr}}$ leiten Sie entsprechende Gleichungen anhand der Randbedingungen bei $z = d$ her.

8. (2 Punkte) Schreiben Sie alle Randbedingungen in Form eines Gleichungssystems für die unbekannten Amplituden.

9. (2 Punkte) Beschreiben Sie (in Worten), wie Sie vorgehen würden, um das transmittierte Feld zu bestimmen.

Die Lösung des Gleichungssystems führt auf folgende Lösung für den Reflexionskoeffizienten

$$r \;=\; \frac{A}{E_0} \;=\; -\frac{r_{12} \,+\, r_{21}\exp\left[2ikd\right]}{1 \,+\, r_{12}\, r_{21}\exp\left[2ikd\right]}\,, \quad \text{wobei} \quad r_{12} \;=\; \frac{n \,-\, 1}{n \,+\, 1} \quad \text{und} \quad r_{21} \;=\; -r_{12}\;.$$

r_{12} ist der Fresnel Reflexionskoeffizient für die untere Grenzfläche und r_{21} für die obere Grenzfläche.

10. (2 Punkte) Bestimmen sie die kleinste Schichtdicke d ($d \neq 0$) für welche die reflektierte Strahlung komplett unterdrückt wird. Drücken Sie das Resultat als Funktion der Wellenlänge λ im Innern des Films aus.

11. (4 Punkte) Der Film wird jetzt mit einem elektromagnetischen Puls bestrahlt. Der Puls trifft senkrecht zur Grenzfläche auf und wird durch das Feld $\mathbf{E}^{\mathrm{in}}(\mathbf{r}, t)$ beschrieben. Beschreiben Sie in Detail wie Sie vorgehen würden um den reflektierten Puls mit Feld $\mathbf{E}^{\mathrm{ref}}(\mathbf{r}, t)$ zu berechnen. Geben Sie alle mathematischen Ausdrücke an, aber ohne diese zu lösen. Hinweis: Die Dispersion des Brechnungsindexes ist zu vernachlässigen, d.h. $n(\omega) = n$.

Wir lassen nun die Pulsdauer gegen Null gehen, sodass

$$\mathbf{E}^{\mathrm{in}}(z, t) \;\;=\;\; \mathbf{E}_0'\,\delta(z - ct)\;.$$

$\mathbf{E}_0'$ ist der elektrische Feldvektor pro Weglänge und δ bezeichnet die Dirac'sche Stossfunktion. Zudem entwickeln wir den Reflexionskoeffizienten des Films in eine Reihe

$$r(\omega) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2jn(\omega/c)d}\,,$$

wobei a_j konstante Koeffizienten der Reihenentwicklung sind.

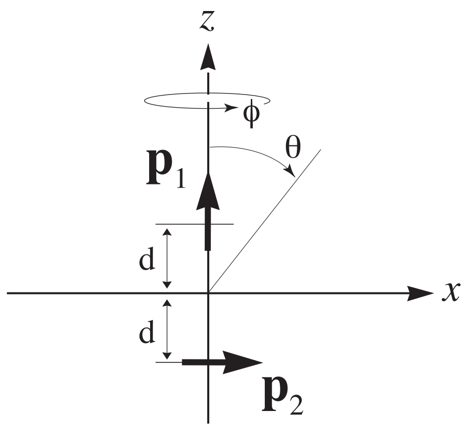
12. (2 Punkt) Berechnen Sie das Spektrum $\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{in}}(z, \omega)$ dieses Dirac Pulses.

13. (4 Punkte) Berechnen Sie das reflektierte Feld $\mathbf{E}^{\mathrm{ref}}(z, t)$. *Hinweis:* $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left[-\mathrm{i}bx\right] = 2\pi\,\delta(b)$.

14. (2 Punkte) Interpretieren Sie das Resultat für $\mathbf{E}^{\mathrm{ref}}(z, t)$.

2 **Antenne aus Dipolpaar** (35 Punkte)

Wir betrachten eine Antenne im Vakuum, die aus zwei zeitharmonischen Dipolen $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ besteht. Die Dipole sind senkrecht zu einander orientiert und durch eine Distanz von $2d$ separiert (siehe Figur). Die Dipole haben die gleiche Amplitude und die relative Phase $\Delta\phi$ kann eingestellt werden. Wir sind an den Fernfeldern bei $\mathbf{r}$ interessiert. Der Abstand $r = |\mathbf{r}|$ ist viel grösser als d, was uns erlaubt die Fraunhofer Näherung zu gebrauchen.



1. (7 Punkte) Wir betrachten zunächst den Fall $d = 0$. Ausgehend von der Green'schen Funktion $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}$ leite man das komplexe Fernfeld $\underline{\mathbf{E}}^{(1)} = \underline{E}_\theta^{(1)}\mathbf{n}_\theta$ des Dipols $\mathbf{p}_1$ her.

2. (3 Punkte) Berechnen Sie das zugehörige Magnetfeld $\underline{\mathbf{H}}^{(1)}$.

3. (7 Punkte) Wir betrachten weiterhin den Fall $d = 0$. Ausgehend von der Green'schen Funktion $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}$ leite man das komplexe Fernfeld $\underline{\mathbf{E}}^{(2)} = \underline{E}_\theta^{(2)}\mathbf{n}_\theta + \underline{E}_\phi^{(2)}\mathbf{n}_\phi$ des Dipols $\mathbf{p}_2$ her.

4. (4 Punkte) Verwenden Sie das Fernfeld $\underline{\mathbf{E}}^{(2)} = (\underline{E}_\theta^{(2)}, \underline{E}_\phi^{(2)})$, um die Intensität $I_0(R, \theta, \phi)$ des Dipols $\mathbf{p}_2$ im Fernfeld zu berechnen. Es gilt weiterhin $d = 0$.

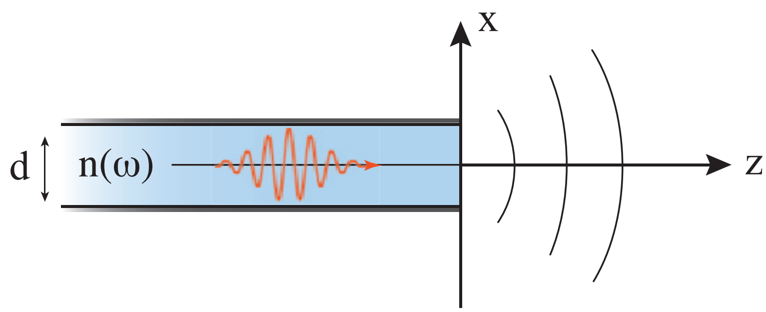
5. (4 Punkte) Anhand der Intensität I_0 berechnen Sie die abgestrahlte Leistung P_2 des Dipols $\mathbf{p}_2$. Hinweis: $\int_0^\pi \sin x \, \cos^2 x \; dx = 2/3$.

6. (5 Punkte) Wir betrachten nun $d \neq 0$. Benutzen sie die Fraunhofer Approximation um die Fernfelder $\underline{\mathbf{E}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{E}}^{(2)}$ der beiden Dipole zu bestimmen.

7. (5 Punkte) Die Distanz zwischen den Dipolen is klein, sodass $kd \ll 1$. Für welche Phase $\Delta\phi$ wird die Strahlung in Richtung $(\phi, \theta) = (0, \pi/4)$ maximal und für welche minimal?

3 Auskopplung aus einem Plattenwellenleiter (30 Punkte)

Wir betrachten die Auskopplung von monochromatischer Mikrowellenstrahlung (Kreisfrequenz ω) aus einem Wellenleiter bestehend aus zwei ideal leitenden Platten mit Abstand d (siehe Figur).



Das Medium zwischen den zwei Platten ist dielektrisch und hat einen dispersiven Brechungsindex $n(\omega)$. Die x-Komponente des komplexen elektrischen Feldes im Wellenleiter ist

$$\underline{E}_x(x,y,z) = \begin{cases} E_0 \sin[\pi x/d]\, \mathrm{e}^{ik_z z} & -d/2 < x < d/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die y-Komponente ist gleich Null. Das Medium im Raumbereich $z > 0$ sei Vakuum.

Zunächst betrachten wir nur den Wellenleiter und nehmen an, dass dieser unendlich lang ist (keine Rückreflexion des Feldes am Ende des Wellenleiters).

1. (4 Punkte) Drücken Sie k_z als Funktion von ω und d aus
2. (4 Punkte) Bestimmen Sie die z-Komponente des komplexen elektrischen Feldes im Wellenleiter.
3. (4 Punkte) Bestimmen Sie die Oberflächenladungsdichte $\sigma(z)$ auf der oberen und unteren Platte des Wellenleiters.

Wir betrachten jetzt den bei $z = 0$ abgeschnittenen Wellenleiter, so wie in der Figur dargestellt. In der Austrittsebene ($z = 0$) gilt näherungsweise

$$\underline{\mathbf{E}}(x,y,0) = \underline{E}_x(x,y,0)\,\mathbf{n}_x \,.$$

(d) (6 Punkte) Berechnen Sie das Fernfeld $\underline{\mathbf{E}}_\infty(x,y,z)$ der ausgekoppelten Strahlung unter Verwendung der Parameter $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, k, E_0 und d.
Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp[-\mathrm{i}bx] = 2\pi\,\delta(b)$.

(e) (4 Punkte) Nehmen Sie an dass $kd \approx 1$ und skizzieren Sie die Intensitätsverteilung im Fernfeld entlang der x-Achse. Beschriften Sie Ihre Achsen sinnvoll.
Hinweis: Behandeln Sie eventuell auftretende Dirac-Funktionen symbolisch.

Wir kehren zurück zum in z-Richtung unendlich ausgedehnten Wellenleiter aus dem ersten Teil der Aufgabe. Es werden nun zwei Felder mit gleicher Amplitude aber mit leicht verschiedenen Frequenzen $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ und $\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$ in den Wellenleiter eingekoppelt. Die x-Komponente des resultierenden Feldes ist

$$E_x(x,z,t) \;\; = \;\; E_0 \, \sin[\pi x/d] \left\{ \sin[k_z(\omega_1) z - \omega_1 t] \; + \; \sin[k_z(\omega_2) z - \omega_2 t] \right\} .$$

Die Überlagerung der Teilfelder resultiert in einer Schwebung. Die Dispersion $k_z(\omega) = k_0 \, n(\omega)$, mit $k_0 = \omega_0/c$, hat zur Folge, dass sich die Trägerwelle und ihre Einhüllende mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreiten. Wir entwickeln $n(\omega)$ in eine Taylor Reihe um die Trägerfrequenz ω_0 und erhalten

$$n(\omega) \;\approx\; n_0 \,+\, (\omega - \omega_0)\dot{n}_{\omega_0}, \tag{1}$$

wobei $\dot{n}_{\omega_0} = \partial n/\partial\omega$ evaluiert bei $\omega = \omega_0$ ist.

(f) (4 Punkte) Schreiben Sie $E_x(x,z,t)$ als Trägerwelle mit Frequenz ω_0 und einer Einhüllenden.
Hinweis: Es gilt $\sin[x] + \sin[y] = 2\cos[(x-y)/2] \, \sin[(x+y)/2]$.

(g) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit v_p und die Gruppengeschwindigkeit v_g des Feldes $E_y(z,t)$. Welche Bedingung muss gelten, damit sich die Einhüllende in negative z-Richtung ausbreitet?
Hinweis: Die Phasengeschwindigkeit v_p entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Trägerwelle und die Gruppengeschwindigkeit v_g der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Einhüllenden.

Letzte Seite (leer)