xxx xxxxx
xx-xxx-xxx, xxxx
xxxx@student.ethz.ch
Lfd.Nr.: x/xxx

Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10S)

08. August 2020, 14:00-17:00 Uhr, HIL G 41

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte beachten Sie:

- Diese Prüfung besteht aus 4 Aufgaben. Die Angabe umfasst 4 beidseitig bedruckte Blätter (8 Seiten) exklusive dieses Deckblatts. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **3 eigenhändig beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Bücher, Vorlesungsmaterialien, ausgedruckte Dokumente und elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.
- Geben Sie dieses Deckblatt für Ihre Lösungen mit ab. Unterschreiben Sie dieses Deckblatt.
- Lösungen sind nachvollziehbar zu begründen. Nicht eindeutig lesbare Passagen bleiben unbewertet. Nicht eindeutig zuzuordnende Passagen bleiben ebenso unbewertet!
- Benutzen Sie einen dokumentenechten schwarzen oder blauen Stift (**kein Rotstift, kein radierbarer Stift**). Verwenden Sie keine Korrekturhilfen (z.B. Tipp-Ex oder Tintenlöscher). **Mit Korrekturhilfen oder radierbarem Stift bearbeitete Passagen bleiben unbewertet!**
- Lösungen auf Angabenblättern oder Deckblatt bleiben unbewertet!
- Verwenden Sie Ihr mitgebrachtes Papier im Format A4 für Ihre Lösungen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige weitere Hinweise von allgemeinem Interesse werden während der Prüfung mitgeteilt.

Viel Erfolg!

Unterschrift Student/-in: ______________________

Aufgabe	Punkte	Visum Korrektor
1	/15	
2	/30	
3	/20	
4	/25	
Total:	/90	

Rückseite Deckblatt, leer

1. Elektromagnetischer Puls (15 Punkte)

Wir betrachten einen elektromagnetischen Puls, der sich im Vakuum in die positive z-Richtung ausbreite. Das elektrische Feld des Pulses zum Zeitpunkt $t = 0$ laute

$$\mathbf{E}(z, t = 0) \;=\; \mathbf{E}_0 \cos[k_0 z]\, \mathrm{e}^{-z^2/z_0^2} \;.$$

$\mathbf{E}_0$ sei ein reeller Feldvektor, es sei $k_0 = \omega_0/c$ und z_0 sei die räumliche Pulsbreite.

(a) (3 Punkte) Formulieren Sie das zeitabhängige Feld des Pulses $\mathbf{E}(z, t)$.

(b) (1 Punkt) Kann man anhand $\mathbf{E}$ das magnetische Feld $\mathbf{H}$ herleiten? Wenn ja, wie? Wenn nein, wieso nicht?

(c) (2 Punkte) Kann man anhand $\mathbf{E}$ das Skalarpotential ϕ und das Vektorpotential $\mathbf{A}$ eindeutig bestimmen? Wenn ja, wie? Wenn nein, wieso nicht?

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit des Pulses.

(e) (3 Punkte) Das Spektrum des Feldes $\mathbf{E}(z, t)$ ist von der Gestalt

$$\hat{\mathbf{E}}(z, \omega) \;=\; \mathbf{E}_0 \,\frac{z_0}{4\sqrt{\pi}\, c}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/c)z} \left[\mathrm{e}^{-(z_0^2/4)(k_0 \pm k)^2} \;+\; \mathrm{e}^{-(z_0^2/4)(k_0 \pm k)^2}\right] \;,$$

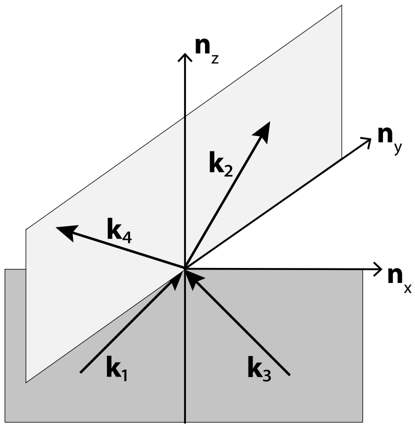
wobei $k = \omega/c$. Erklären Sie, wie sich $\hat{\mathbf{E}}(z, \omega)$ aus $\mathbf{E}(z, t)$ errechnet (das Ausführen der Rechnung ist nicht erforderlich). Formulieren Sie das Spektrum eindeutig, indem Sie sich bei den $\pm$-Zeichen jeweils für ein Vorzeichen entscheiden. Begründen Sie Ihre Wahl.

(f) (4 Punkte) Erstellen Sie einen Graphen der Frequenzabhängigkeit von $|\hat{\mathbf{E}}(z, \omega)|$ für beliebiges, fixes z. Stellen Sie in Ihrem Graphen die Rollen der Parameter z_0 und k_0 klar.

Diese Seite ist aus technischen Gründen leer.
Unterschreiben Sie das Deckblatt!

2. Vier ebene Wellen (30 Punkte)

Wir betrachten vier linear polarisierte ebene Wellen bei Kreisfrequenz ω mit elektrischen Feldern $\underline{\mathbf{E}}_i = E_0 \mathbf{n}_i \exp\left[\mathrm{i}\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}\right]$ (mit $i \in \{1,2,3,4\}$) im Vakuum. Hierbei seien $\mathbf{n}_i$ rein reelle (positive oder negative) Polarisationsvektoren der Länge eins. Alle Felder besitzen *keine* elektrische Feldkomponente entlang der z-Richtung. Die z-Komponenten aller vier Wellenvektoren seien positiv. Die Propagationsrichtungen (gegeben durch die $\mathbf{k}_i$) verlaufen entlang der Winkelhalbierenden zwischen den kartesischen Koordinatenachsen $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.



(a) (4 Punkte) Formulieren Sie die Wellenvektoren $\mathbf{k}_i$ der vier Wellen. Verwenden Sie das Kürzel κ, das die x-Komponente von $\mathbf{k}_1$ bezeichne. Geben Sie den Wert von κ unter Verwendung von Kreisfrequenz ω und Lichtgeschwindigkeit c an.

(b) (2 Punkte) Geben Sie die Polarisationsvektoren $\mathbf{n}_i$ an. Wählen Sie die Vorzeichen (Phasen) so, dass $\mathbf{n}_1$ antiparallel zu $\mathbf{n}_3$, sowie $\mathbf{n}_2$ antiparallel zu $\mathbf{n}_4$ ist. Zudem gelte $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_z$.
Hinweis: Vergessen Sie nicht den oben genannten Umstand, dass die z-Komponenten der Felder verschwinden.

(c) (4 Punkte) Formulieren Sie das totale Feld $\underline{\mathbf{E}}$ als Summe der vier Teilfelder.

(d) (4 Punkte) Formulieren Sie die gesamte Feldintensität.

(e) (2 Punkte) In welche Richtung zeigt der Poyntingvektor an einem beliebigen Punkt im Raum?
Hinweis: Argumentieren Sie ohne Rechnung.

(f) (8 Punkte) Erstellen Sie eine Skizze der Polarisationsverteilung des elektrischen Feldes in der Ebene $z = 0$ zu einem Zeitpunkt, zu dem das elektrische Feld maximal ist. (1) Markieren Sie in Ihrer Skizze der Ebene $z = 0$ zunächst die Koordinatenachsen und den Ursprung. (2) Markieren Sie dann jene Punkte, an denen die Intensität verschwindet, mit kleinen Kreuzen. Geben Sie den Abstand dieser Punkte an. (3) Markieren Sie die Punkte maximaler Feldintensität mit kleinen Kreisen. (4) Tragen Sie schliesslich an repräsentativen Punkten

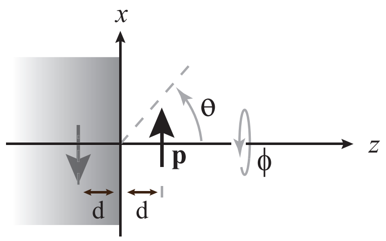
(bei den Kreisen und an Mittelpunkten zwischen Kreisen) kleine Pfeile auf, die die Richtung des Feldes zum gewählten Zeitpunkt anzeigen.
Hinweis: Beschränken Sie Ihre Skizze auf drei bis vier Perioden der Intensitätsverteilung und halten Sie Ihre Arbeit ordentlich und übersichtlich.

(g) (2 Punkte) Suchen Sie in Ihrer Skizze der Polarisationsverteilung nach "Polarisationswirbeln" und markieren Sie diese. Ein Polarisationswirbel entsteht dort, wo das elektrische Feld einen Raumpunkt in einem geschlossenen Pfad umfliesst.

(h) (4 Punkte) Begeben Sie sich gedanklich ins Zentrum eines Polarisationswirbels. Welchen Wert hat dort das elektrische Feld? In welche Richtung zeigt dort das Magnetfeld? Begründen Sie Ihre Antwort auf letztere Frage mithilfe einer Maxwell'schen Gleichung.

3. Dipol über ideal leitender Grenzfläche (20 Punkte)

Wir betrachten einen zeitharmonischen Dipol, der sich auf der z-Achse in einem variablen Abstand d zu einer ideal reflektierenden Grenzfläche befinde (siehe Abbildung). Die Grenzfläche sei bei $z = 0$, das komplexe Dipolmoment sei $\underline{\mathbf{p}}$, der Dipol sei parallel zur x-Achse ausgerichtet, und seine Kreisfrequenz betrage ω. Die Abstrahlcharakteristik der Quelle kann durch den Abstand d kontrolliert werden. Der Halbraum $z > 0$ sei mit Vakuum gefüllt.



Das Feld im Halbraum $z > 0$ setzt sich zusammen aus dem Feld des Dipols $\underline{\mathbf{p}}$ bei $z = d$, das direkt dorthin abgestrahlt wird, sowie aus dem an der Grenzfläche reflektierten Feld. Das reflektierte Feld entspricht gerade dem Feld eines Spiegeldipols $-\underline{\mathbf{p}}$ bei $z = -d$ in Vakuum (also in Absenz des reflektierenden Mediums im Halbraum $z < 0$). Mit anderen Worten, das Feld im Halbraum $z > 0$ eines Dipols vor einer ideal reflektierenden Grenzfläche entspricht dem Feld zweier (spiegelverkehrter) Dipole in Vakuum.
In dieser Aufgabe verifizieren wir die beschriebene Spiegeldipol-Methode. Dazu berechnen wir die Felder beider Dipole in der Ebene $z = 0$ und zeigen, dass die Randbedingungen erfüllt sind. Wir bezeichnen Orte auf der Grenzfläche mit $\mathbf{r}$ und den Ort des Dipols $\underline{\mathbf{p}}$ mit $\mathbf{r}_0$.

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie das gesamte Feld $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r}) + \underline{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r})$ in der Ebene $z = 0$. Hier ist $\underline{\mathbf{E}}_1$ das vom Dipol $\underline{\mathbf{p}}$ erzeugte Feld und $\underline{\mathbf{E}}_2$ das vom Spiegeldipol erzeugte Feld (das gerade dem von der Grenzfläche reflektierten Feld entspricht). Verwenden Sie zur Formulierung der Felder die Green'sche Funktion. Überzeugen Sie sich, dass die entsprechenden Komponenten des elektrischen Gesamtfeldes an der Grenzfläche die Randbedingung am idealen Leiter erfüllen.
Hinweis: Beachten Sie den Umstand $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = |\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|$.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Oberflächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ auf der Grenzfläche $z = 0$. Geben Sie hierzu explizit die entsprechende Randbedingung an der Grenzfläche an.
Hinweis: Für einen idealen Leiter verschwinden alle Felder im Inneren des Leiters.

Für einen Dipol im Abstand d vor der Grenzfläche lautet das elektrische Fernfeld im Halbraum $z > 0$

$$\underline{\mathbf{E}}^{\infty}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}_{\infty} = -2\mathrm{i}\,\omega^2 \mu_0\, p\, \frac{\exp\left[\mathrm{i}kR\right]}{4\pi R} \begin{bmatrix} 1 - x^2/R^2 \\ -xy/R^2 \\ -xz/R^2 \end{bmatrix} \sin\left[kd\frac{z}{R}\right].$$

Wir interessieren uns im Folgenden für die Propagation des Feldes entlang der z-Richtung und somit für das Feldwinkelspektrum $\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z)$.

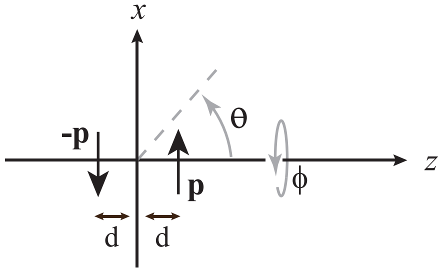
(c) (5 Punkte) Anhand von $\underline{\mathbf{E}}_{\infty}$, bestimmen Sie das räumliche Fourierspektrum $\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z = 0)$ in der Ebene der Grenzfläche $z = 0$. Verwenden Sie einen Ihnen bekannten Zusammenhang, der mithilfe der Methode der stationären Phase hergeleitet wurde.

(d) (2 Punkte) Wie berechnet sich das Feld $\underline{\mathbf{E}}(x, y, z = 0)$ auf der Grenzfläche aus $\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z = 0)$?
Hinweis: Geben Sie einen Ausdruck an. Dessen Auswertung ist nicht erforderlich.

(e) (3 Punkte) Erfüllt das in Aufgabe (d) resultierende Feld $\underline{\mathbf{E}}(x, y, z = 0)$ die Randbedingungen an der Grenzfläche? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Es ist keine Rechnung erforderlich.

4. Strahlendes Dipolpaar (25 Punkte)

Wir betrachten zwei zeitharmonische Dipole mit Kreisfrequenz ω in Vakuum. Der erste sei entlang der x-Richtung polarisiert, habe Dipolmoment $\underline{\mathbf{p}}$ und befinde sich auf der z-Achse im Abstand d zum Usprung. Der zweite habe Dipolmoment $-\underline{\mathbf{p}}$ und befinde sich auf der z-Achse im Abstand $-d$ vom Ursprung. Wir betrachten in dieser Aufgabe die Strahlungsleistung der Anordnung.



Startpunkt ist das elektrische Fernfeld eines in x-Richtung zeigenden Dipols $\underline{\mathbf{p}}$, gelegen am Ursprung

$$\underline{\mathbf{E}}^{\infty}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} E_R \\ E_\theta \\ E_\phi \end{bmatrix}_\infty = \omega^2 \mu_0\, p\, \frac{\exp\,[\mathrm{i}kR]}{4\pi R} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\phi\, \cos\theta \\ -\sin\phi \end{bmatrix} .$$

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie das zugehörige Magnetfeld $\underline{\mathbf{H}}^{\infty}(\mathbf{r})$.
Hinweis: Machen Sie Gebrauch von dem Umstand, dass Sie sich im Fernfeld befinden.

(b) (5 Punkte) Wir versetzen nun den betrachteten einzelnen Dipol $\underline{\mathbf{p}}$ zu $z = d$. Verwenden Sie die Fraunhofer Näherung, um das zugehörige elektrische Fernfeld $\underline{\mathbf{E}}_1^{\infty}(\mathbf{r})$ zu berechnen. Nennen Sie explizit die beiden essentiellen Schritte der Fraunhofer Näherung. Formulieren Sie Ihr Resultat in sphärischen Koordinaten und unter Verwendung sphärischer Einheitsvektoren.

(c) (2 Punkte) Wiederholen Sie Aufgabe (b) für das elektrische Fernfeld $\underline{\mathbf{E}}_2^{\infty}(\mathbf{r})$ des zweiten Dipols $-\underline{\mathbf{p}}$ bei $z = -d$.

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie das gesamte elektrische Fernfeld $\underline{\mathbf{E}}^{\infty} = \underline{\mathbf{E}}_1^{\infty} + \underline{\mathbf{E}}_2^{\infty}$.

(e) (5 Punkte) Berechnen Sie die Intensität $I(R, \theta, \phi)$ des vom Dipolpaar abgestrahlten Feldes. Separieren Sie in Ihrem Ausdruck für die Intensität die Leistung P_0 eines einzelnen strahlenden Dipols im Vakuum um zu zeigen, dass die Intensität proportional zu P_0 ist.
Hinweis: Machen Sie Gebrauch von dem Umstand, dass Sie sich im Fernfeld befinden.

(f) (6 Punkte) Berechnen Sie die gesamte vom Dipolpaar abgestrahlte Leistung P in Einheiten von P_0.
Hinweis 1: Es gilt $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, \mathrm{d}x = \pi$, $\int_0^{\pi} \sin^3 x\, \mathrm{d}x = 4/3$, sowie $\int_0^{\pi} \sin^5 x\, \mathrm{d}x = 16/15$.

Hinweis 2: Verwenden Sie, unabhängig von Ihrem Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe, zur Lösung dieser Teilaufgabe die Intensität

$$I = \frac{3}{2\pi}\, P_0 k^2 d^2\, \frac{\cos^2\theta\,(\sin^2\phi\,\cos^2\theta + \cos^2\phi)}{R^2}.$$

(g) (2 Punkte) Welches Ergebnis erwarten Sie für die abgestrahlte Leistung des Dipolpaares im Grenzwert $d \to 0$? Begründen Sie Ihre Antwort ohne Rechnung.