xxxx xxxx **xxxxx**
xx-xxx-xxx, ITET
xxx@student.ethz.ch
Lfd.Nr.: 1/x

Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10S)

23. Januar 2020, 09:00-12:00 Uhr, ETZ F91

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte beachten Sie:

- Diese Prüfung besteht aus 4 Aufgaben. Die Angabe umfasst 2 beidseitig bedruckte Blätter (4 Seiten) exklusive dieses Deckblatts. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **3 eigenhändig beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Bücher, Vorlesungsmaterialien, ausgedruckte Dokumente und elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.
- Geben Sie dieses Deckblatt für Ihre Lösungen mit ab. Unterschreiben Sie dieses Deckblatt.
- Lösungen sind nachvollziehbar zu begründen. Nicht eindeutig lesbare Passagen bleiben unbewertet. Nicht eindeutig zuzuordnende Passagen bleiben ebenso unbewertet!
- Benutzen Sie einen dokumentenechten schwarzen oder blauen Stift (**kein Rotstift, kein radierbarer Stift**). Verwenden Sie keine Korrekturhilfen (z.B. Tipp-Ex oder Tintenlöscher). **Mit Korrekturhilfen oder radierbarem Stift bearbeitete Passagen bleiben unbewertet!**
- Schreiben Sie nicht direkt auf die Angabe oder das Deckblatt. Lösungen auf Angabenblättern bleiben unbewertet!
- Verwenden Sie Ihr mitgebrachtes Papier im Format A4 für Ihre Lösungen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige Hinweise von allgemeinem Interesse werden während der Prüfung laut mitgeteilt.

Viel Erfolg!

Unterschrift Student/-in: ______________________________

Aufgabe	Punkte	Visum Korrektor
1	/35	
2	/25	
3	/20	
4	/20	
Total:	/100	

Rückseite Deckblatt, leer

1 Allgemeine Fragen (35 Punkte)

(a) (2 Punkte) Gegeben ist die lineare Materialgleichung $\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varepsilon}(t-t')\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t')\,dt'$. Welche Bedingung muss $\tilde{\varepsilon}$ erfüllen?

(b) (6 Punkte) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen und den konstituierenden Relationen die inhomogene Wellengleichung für das reelle $\mathbf{H}$-Feld her.

(c) (3 Punkte) Beschreiben Sie in knappen Worten und ohne Formeln, wie Sie vorgehen würden, um in einem dispersiven Medium das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ einer zeitabhängigen Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)$ zu bestimmen. Dabei sei $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$.

(d) (4 Punkte) Wir betrachten eine Kugel mit Radius R_0 und einer räumlich homogenen Ladungsdichte ρ_0 (innerhalb der Kugel). Verwenden Sie das Gauss'sche Gesetz, um das elektrische Feld $\mathbf{E}(r)$ innerhalb der Kugel zu berechnen.

(e) (3 Punkte) Ein elektromagnetischer Puls propagiere im Vakuum in negative x-Richtung und sei y-polarisiert. Zum Zeitpunkt $t=0$ laute die y-Komponente des Feldes

$$E_y(x,t=0) = E_0 \exp\left[-\frac{(kx)^2}{\Delta^2}\right] \sin(kx).$$

Wie lautet die y-Komponente des Feldes an einem beliebigen Ort und zu einer beliebigen Zeit?

(f) (5 Punkte) Ein zeitharmonisch oszillierender Dipol mit Dipolmoment $\underline{\mathbf{p}} = \mathrm{p}_0[1,\mathrm{i},0]^T$ befinde sich am Ursprung. Unter Verwendung der Green'schen Funktion, formulieren Sie das Fernfeld des Dipols $\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{FF}}(\mathbf{r})$. Geben Sie sodann das Fernfeld auf der z-Achse an und bestimmen Sie dessen Polarisationszustand.

(g) (4 Punkte) In der Ebene $z=0$ befinde sich ein intransparenter Schirm. Im Bereich $-d/2 < x < d/2$ und $-d/2 < y < d/2$ befinde sich eine rechteckige Öffnung. Aus dem Halbraum $z<0$ kommend falle eine ebene Welle mit Wellenvektor $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ und Amplitude $\mathbf{E}_0$ auf die Blende ein. Berechnen Sie das Feldwinkelspektrum in der Ebene $z=0$ unter der Annahme, dass das Feld in der Öffnung von den Rändern der Blende nicht beeinträchtigt wird.

(h) (3 Punkte) Fortsetzung der letzten Teilaufgabe: Geben Sie das Fernfeld an, das in grossem Abstand von der Ebene $z=0$ herrscht.

(i) (5 Punkte) Wir betrachten einen Resonator mit ideal leitenden Wänden. Der Resonator ist mit einem Dielektrikum der Permittivität $\varepsilon = 2$ gefüllt. Die Dimensionen des Resonators sind $L_x = \lambda$, $L_y = 2\lambda$, $L_z = 3\lambda$. Bestimmen Sie die Anzahl Moden mit Frequenz kleiner als $f_0 = c/(4\lambda)$.

2 Strahlungsdruck auf ein Partikel (25 Punkte)

Bereits Kepler beobachtete den Umstand, dass die Schweife von Kometen stets von der Sonne weg zeigen und spekulierte, dass es einen Strahlungsdruck geben könnte, der die Teilchen im Schweif entlang der Ausbreitungsrichtung des Sonnenlichtes ablenkt. In dieser Aufgabe berechnen Sie die Kraft auf einen (elektrisch neutralen) dipolaren Streuer in einer ebenen Welle mit Kreisfrequenz ω im Vakuum.

(a) (1 Punkt) Geben Sie den Ausdruck für die Lorentzkraft auf eine diskrete Ladung q an, die sich mit Geschwindigkeit v in einem elektromagnetischen Feld bewegt.

(b) (3 Punkte) Im Folgenden verwenden wir den Ausdruck für die Volumendichte der Lorentzkraft $d\mathbf{F}/dV = \rho\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, die auf eine Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ wirkt. Leiten Sie diesen Ausdruck aus Ihrer Antwort aus der ersten Teilaufgabe her.

(c) (4 Punkte) Der Streuer ist ungeladen und die Zeitabhängigkeit der Felder und Ströme ist zeitharmonisch (Kreisfrequenz ω). Leiten Sie einen Ausdruck her für das Zeitmittel $\langle d\mathbf{F}/dV \rangle$ als Funktion der *komplexen* Felder $\underline{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ und $\underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$.

(d) (2 Punkte) Wir modellieren den Streuer als Punktdipol mit Dipolmoment $\underline{\mathbf{p}}$. Geben Sie einen Ausdruck an für die komplexe Stromdichte $\underline{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ des Punktdipols, der sich am Ursprung befinde.

(e) (5 Punkte) Der Streuer ist nach wie vor ungeladen und erhält sein Dipolmoment $\underline{\mathbf{p}} = \alpha\underline{\mathbf{E}}$ durch die Polarisierbarkeit α und das treibende elektrische Feld $\underline{\mathbf{E}}$ der ebenen Welle, die sich in Richtung $n_{\mathbf{k}}$ ausbreite. Leiten Sie einen Ausdruck her für die mittlere Kraft $\langle \mathbf{F} \rangle$, die auf den Streuer in der ebenen Welle wirkt. Formen Sie Ihren Ausdruck so um, dass er (ausser numerischen Faktoren) lediglich die Frequenz ω, die Polarisierbarkeit α, die Vakuumpermeabilität μ_0, die Ausbreitungsrichtung $n_{\mathbf{k}}$, sowie die Intensität des einfallenden Feldes I enthält.

(f) (1 Punkt) Wir drücken nun die Polarisierbarkeit $\alpha = \alpha' + \mathrm{i}\alpha''$ durch ihren Realteil α' und Imaginärteil α'' aus. Zeigen Sie, dass für die Kraft auf den Streuer gilt $\mathbf{F} = \mathrm{Im}\{\alpha\}\,\omega\mu_0 I n_{\mathbf{k}}$.

(g) (1 Punkt) Wir werden nun die Strahlungskraft auf den Streuer in Verbindung bringen mit seiner gestreuten Leistung. Geben Sie die Leistung an, die ein Dipol mit Dipolmoment $\underline{\mathbf{p}}$ abstrahlt.

(h) (3 Punkte) Geben Sie einen Ausdruck an für die abgestrahlte Leistung des Streuers in der vorliegenden Aufgabe. Überzeugen Sie sich, dass Ihr Ausdruck proportional ist zu $|\alpha|^2 I$.

(i) (5 Punkte) Für einen absorptionsfreien dipolaren Streuer gilt der Zusammenhang $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}k^3|\alpha|^2 = \mathrm{Im}\{\alpha\}$. Verwenden Sie diesen Umstand um zu zeigen, dass die Kraft auf den Streuer in der ebenen Welle proportional ist zu der von ihm gestreuten Leistung, wobei der Proportionalitätsfaktor allein durch die Lichtgeschwindigkeit gegeben ist.

3 Strahlung einer Antenne (20 Punkte)

Gegeben ist die Stromdichte $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)$ einer Antenne im Vakuum.

(a) (2 Punkte) Wie berechnet sich die Ladungsdichte $\rho_0(\mathbf{r}, t)$ der Antenne?

(b) (1 Punkt) Geben Sie einen allgemeinen Ausdruck für das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ des abgestrahlten Feldes, das von der Stromverteilung generiert wird.

(c) (4 Punkte) Beschreiben Sie das Resultat von voriger Aufgabe in Worten.

(d) (1 Punkt) Wie berechnet sich das magnetische Feld $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ anhand $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$?

(e) (2 Punkte) Sind das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ und das magnetische Feld $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ von der Eichung abhängig?

(f) (2 Punkte) Die Antenne wird nun mit einem zeitharmonischen Strom betrieben, das heisst, $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\{\underline{\mathbf{j}}_0(\mathbf{r}) \exp[-\mathrm{i}\omega t]\}$. Unter Verwendung der Green'schen Funktion $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}$, geben Sie einen Ausdruck für das abgestrahlte komplexe elektrische Feld $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ an.

(g) (4 Punkte) Wenden Sie das Poyntingtheorem im Zeitmittel auf den vorliegenden Fall an, um zwei Ausdrücke anzugeben, die die mittlere abgestrahlte Leistung P der zeitharmonisch betriebenen Antenne liefern.

(h) (2 Punkte) Die Antenne sendet ein Signal mit Mittelfrequenz ω. Die Querschnittsfläche des generierten Feldes am Orte der Antenne sei A (Radius $r_0 \approx \sqrt{A/\pi}$). Wie gross muss der Abstand L zur Antenne sein, damit die Fraunhofer Näherung gilt?

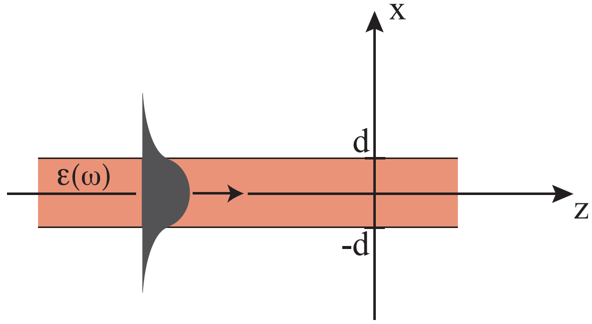
(i) (2 Punkte) Unter welchem Winkel β divergiert das Feld?

4 **Dispersion im Wellenleiter** (20 Punkte)

Gegeben sind die longitudinalen Felder einer Wellenleiter-Mode in einer dielektrischen Schicht, die von Vakuum umgeben ist (siehe Abbildung). Es gilt $\underline{H}_z = 0$ und

$$\underline{E}_z = \mathrm{e}^{ik_z z} \begin{cases} \mathrm{E}_{\uparrow} \exp\left[-\gamma_x x\right] & x > d \\ \mathrm{E}_0 \cos(k_x x) & -d < x < d \\ \mathrm{E}_{\downarrow} \exp\left[+\gamma_x x\right] & x < -d \end{cases} .$$

Die Permittivität der Schicht ist ε, die Schichtdicke $2d$ und die Kreisfrequenz ω. Die Dispersion der Wellenleitermode $k_z(\omega)$ sei gegeben.



(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie k_x und γ_x.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie den Wertebereich von k_z, für welchen geführte Ausbreitung entlang des Wellenleiters möglich ist.

(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Felder $\mathrm{E}_{\uparrow}$ und $\mathrm{E}_{\downarrow}$ als Funktion von E_0.

(d) (6 Punkte) Berechnen Sie die transversen Felder $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$, $\underline{H}_x$, $\underline{H}_y$ im <u>Innern</u> des Wellenleiters.

Ein Puls mit Mittelfrequenz ω_0 wird übermittelt und die Verzerrung durch Dispersion soll berechnet werden. Dazu kann die Propagationskonstante wie folgt angenähert werden

$$k_z(\omega) \approx k_z(\omega_0) + \frac{1}{\beta}(\omega - \omega_0) .$$

(e) (2 Punkte) Welche Bedeutung hat die Konstante β? Wie berechnet sich β aus der ursprünglichen Dispersionsrelation $k_z(\omega)$?