xxxx xxxx **xxxxx**
xx-xxx-xxx, ITET
xxx@student.ethz.ch
Lfd.Nr.: 1/x

Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10S)

10. August 2019, 09:00-12:00 Uhr, HIL E6 / F15

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte beachten Sie:

- Diese Prüfung besteht aus 3 Aufgaben. Die Angabe umfasst 3 beidseitig bedruckte Blätter (6 Seiten) exklusive dieses Deckblatts. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **3 eigenhändig beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Bücher, Vorlesungsmaterialien, ausgedruckte Dokumente und elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.
- Geben Sie dieses Deckblatt für Ihre Lösungen mit ab. Unterschreiben Sie dieses Deckblatt.
- Lösungen sind nachvollziehbar zu begründen. Nicht eindeutig lesbare Passagen bleiben unbewertet. Nicht eindeutig zuzuordnende Passagen bleiben ebenso unbewertet!
- Benutzen Sie einen dokumentenechten schwarzen oder blauen Stift (**kein Rotstift, kein radierbarer Stift**). Verwenden Sie keine Korrekturhilfen (z.B. Tipp-Ex oder Tintenlöscher). **Mit Korrekturhilfen oder radierbarem Stift bearbeitete Passagen bleiben unbewertet!**
- Schreiben Sie nicht direkt auf die Angabe oder das Deckblatt. Lösungen auf Angabenblättern bleiben unbewertet!
- Verwenden Sie Ihr mitgebrachtes Papier im Format A4 für Ihre Lösungen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige Hinweise von allgemeinem Interesse werden während der Prüfung laut mitgeteilt.

Viel Erfolg!

Unterschrift Student/-in: ______________________________

Aufgabe	Punkte	Visum Korrektor
1	/40	
2	/25	
3	/35	
Total:	/100	

Rückseite Deckblatt, leer

1. Positionsmessung mit evaneszenten Wellen (40 Punkte)

Die Vibration $\delta(t)$ einer ideal leitenden Metallplatte soll mit einem evaneszenten Feld gemessen werden (siehe Illustration unten). Das evaneszente Feld werde durch Totalreflexion einer p polarisierten ebenen Welle unter dem Winkel θ an der Oberfläche (in der Ebene $z = 0$) eines dielektrischen Mediums (Medium 1) mit Permittivität ε_1 erzeugt. Zwischen dem dielektrischen Medium und der Metallplatte (Medium 3) befinde sich ein Luftspalt der Dicke z_0 (den wir als Vakuum modellieren, Medium 2). Die kleine Auslenkung δ um z_0 werde anhand der Phase ϕ der reflektierten Welle gemessen. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die Sensitivität

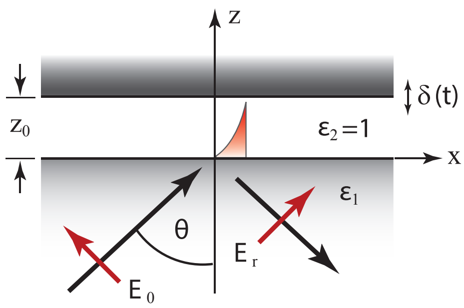
$$S = \left. \frac{\mathrm{d}\phi(z)}{\mathrm{d}z} \right|_{z=z_0} \tag{1}$$

zu berechnen. Die Medien seien nicht magnetisch ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$) und die Phase ϕ sei relativ zur im Medium 1 einfallenden ebenen Welle

$$\mathbf{E}_{\mathrm{in}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos[k_x x + k_z z - \omega t] \tag{2}$$

definiert. Dementsprechend gelte für das reflektierte Feld

$$\mathbf{E}_{\mathrm{ref}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\mathrm{r}} \cos[k_x x - k_z z - \omega t + \phi(z_0)] \ . \tag{3}$$



(a) (2 Punkte) Geben Sie für die konstanten Amplituden $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{E}_{\mathrm{r}}$ an, ob diese jeweils reell oder komplexwertig sind und begründen Sie Ihre Antwort kurz.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie das Verhältnis $|\mathbf{E}_0|/|\mathbf{E}_r|$.
Hinweis: Keine Rechnung erforderlich. Begründen Sie Ihr Ergebnis kurz.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie anhand des Gauss'schen Gesetzes den elektrischen Feldvektor $\mathbf{E}_0$ unter Verwendung von k_x, k_z und k_1 (Betrag des Wellenvektors in Medium 1). Es gelte $|\mathbf{E}_0| = \mathrm{E}_0$.

(d) (1 Punkt) Bestimmen Sie $\mathbf{E}_{\mathrm{r}}$ unter Verwendung von k_x, k_z und k_1. Es gelte $|\mathbf{E}_{\mathrm{r}}| = \mathrm{E}_{\mathrm{r}}$.

(e) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Betrag und die Komponenten des Wellenvektors $\mathbf{k}_1 = [k_x, 0, k_z]^T$ als Funktion von θ, ω und ε_1.

(f) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Betrag und die Komponenten des Wellenvektors $\mathbf{k}_2 = [k_{x_2}, 0, k_{z_2}]^T$ im Luftspalt als Funktion von θ, ω und ε_1.

(g) (2 Punkte) Für welche Einfallswinkel θ wird das Feld im Luftspalt evaneszent?

(h) (1 Punkt) Geben Sie den allgemeinen Zusammenhang zwischen dem reellwertigen monochromatischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und dem zugehörigen komplexen Feld $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ an.

(i) (2 Punkte) Formulieren Sie das komplexe einfallende Feld $\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{in}}(\mathbf{r})$ sowie das reflektierte Feld $\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{ref}}(\mathbf{r})$. Geben Sie alle Vektorkomponenten explizit an.

(j) (4 Punkte) Formulieren Sie das komplexe elektrische Feld im Luftspalt $\underline{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r})$ als Summe zweier gegenläufiger Teilfelder, wobei die nach oben laufende Welle die komplexe Amplitude $\mathrm{E}_{\uparrow}$ habe und die nach unten laufende Welle die komplexe Amplitude $\mathrm{E}_{\downarrow}$. Verwenden Sie die Komponenten von $\mathbf{k}_2$, um geeignete Polarisationsvektoren mit Länge eins zu definieren.

(k) (7 Punkte) Geben Sie eine Maxwell-Gleichung für die reellen Felder an, mithilfe derer Sie die magnetischen Felder $\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{in}}(\mathbf{r})$, $\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{ref}}(\mathbf{r})$ und $\underline{\mathbf{H}}_2(\mathbf{r})$ aus den elektrischen Feldern berechnen können. Formulieren Sie diese $\underline{\mathbf{H}}$-Felder als Funktion von E_0, E_{r}, $\mathrm{E}_{\uparrow}$ und $\mathrm{E}_{\downarrow}$, sowie unter Verwendung der Komponenten von $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}_2$ und der Phase ϕ. Halten Sie Ihre Ausdrücke durch Verwendung der Wellenimpedanz Z_i im Medium $i \in \{1, 2, 3\}$ übersichtlich.

(l) (2 Punkte) Formulieren Sie (mathematisch) allgemein die Randbedingungen für die $\mathbf{H}$ und die $\mathbf{E}$ Felder an einer beliebigen Grenzfläche mit Normalenvektor $\mathbf{n}_n$ in Abwesenheit von Oberflächenströmen.

(m) (4 Punkte) Wenden Sie die Randbedingungen an der Grenzfläche zwischen Dielektrikum und Luftspalt des vorliegenden Problems auf die elektrischen und magnetischen Felder an, um zwei Gleichungen für die elektrischen Feldamplituden zu erhalten.

(n) (2 Punkte) Anwendung der Randbedingungen führe auf das Gleichungssystem

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} E_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(z_0)}/E_0 \\ \mathrm{E}_{\uparrow}/\mathrm{E}_0 \\ \mathrm{E}_{\downarrow}/\mathrm{E}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Die Matrix $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$ sei durch die Materialparameter und die Geometrie des Problems bestimmt und enthalte keinerlei Unbekannte. Wie gehen Sie vor, um die gesuchte Phase $\phi(z_0)$ zu erhalten? Wie begegnen Sie insbesondere dem Problem, dass es augenscheinlich vier Unbekannte ($E_r, \phi, E_{\uparrow}, E_{\downarrow}$) gibt, jedoch nur drei Gleichungen? Formulieren Sie Ihre Antwort in knappen Worten.

(o) (3 Punkte) Für einen Einfallswinkel von $\theta = 60°$ und ein dielektrisches Medium mit $\varepsilon_1 = 2.25$ findet man

$$\phi(z_0) \;\approx\; 2.4(\mathrm{e}^{-2k_2 z_0} - 1)$$

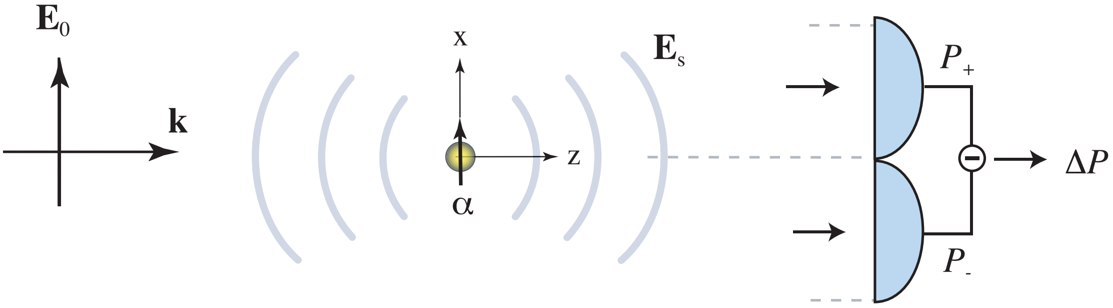
Bestimmen Sie die Sensitivität $S(z_0)$ gemäss der Definition in der Aufgabenstellung für einen Luftspalt von $z_0 = \pi/k_2$. Wie gross ist die Phase $\Delta\phi$, die durch eine kleine Auslenkung δ um z_0 verursacht wird?

2. Detektion eines Projektils (25 Punkte)

Ein Projektil im Vakuum am Ort $\mathbf{r}_0$ werde von einer monochromatischen (Kreisfrequenz ω), x-polarisierten und in z Richtung propagierenden ebenen Radiowelle bestrahlt und das gestreute Feld werde detektiert. Die Wellenlänge λ der Radiowelle sei viel grösser als das Projektil, das somit als dipolarer Streukörper betrachtet werden kann. Das einfallende komplexe elektrische Feld $\underline{\mathbf{E}}_0$ induziert ein komplexes Dipolmoment

$$\underline{\mathbf{p}} = \alpha \underline{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}_0)$$

im Projektil, wobei $\alpha = \alpha' + \mathrm{i}\alpha''$ (mit α', α'' reell) die komplexe Polarisierbarkeit des Projektils bezeichne. Die Magnetisierbarkeit des Projektils sei vernachlässigbar. Das gestreute Feld $\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{s}$ interferiert mit dem einfallenden Feld $\underline{\mathbf{E}}_0$, und die resultierende Intensität werde von zwei Detektoren in der Ebene $z = \mathrm{const.}$ gemessen (siehe Abbildung). Diese liefern die Leistung P_+ und P_-. Wenn sich das Projektil im Ursprung befindet ($\mathbf{r}_0 = 0$), empfängt jeder Detektor aus Symmetriegründen gleich viel Strahlungsenergie, so dass $\Delta P = P_+ - P_- = 0$. Wenn sich das Projektil nicht im Ursprung befindet ($\mathbf{r}_0 \neq 0$), so wird die Symmetrie gebrochen, und das Differenzsignal $\Delta P(t)$ gibt Aufschluss über die Position des Projektils.



(a) (3 Punkte) Das Projektil sei zunächst im Ursprung ($\mathbf{r}_0 = 0$) und der induzierte Dipol sei $\mathbf{p} = \mathrm{p}\mathbf{n}_\mathrm{x}$. Ausgehend von der Green'schen Funktion $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}$, formulieren Sie das gestreute Fernfeld $\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{s} = [\mathrm{E}_{\mathrm{s_x}}, \mathrm{E}_{\mathrm{s_y}}, \mathrm{E}_{\mathrm{s_z}}]^T$ des Projektils.
<u>Hinweis:</u> Im Fernfeld lautet die Green'sche Funktion

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 = 0) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2}\right] .$$

(b) (4 Punkte) Der Dipol werde jetzt vom Ursprung in x-Richtung an die Stelle $\mathbf{r}_0 = [x_0, 0, 0]^T$ versetzt. Verwenden Sie die Fraunhofer-Näherung, um das Fernfeld zu berechnen. Geben Sie explizit in wenigen Worten an, welche Näherungen in der Fraunhofer Approximation bezüglich Amplitude und Phase gemacht werden.

Das gestreute Feld $\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{s}$ ist dem einfallenden Feld $\underline{\mathbf{E}}_0 = \mathrm{E}_0\,\mathbf{n}_\mathrm{x}\exp[\mathrm{i}kz]$ überlagert. Der Detektor sei klein und es gelte $r \approx z$. Zudem beschränken wir uns auf die x-Komponente der Felder. Die y- und z-Komponenten von $\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{s}$ sollen im Folgenden vernachlässigt werden.

(c) (2 Punkte) Geben Sie einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der Intensität I und einem beliebigen komplexen elektrischen Feld $\underline{\mathbf{E}}$ in einem Medium mit Wellenimpedanz Z an.

(d) (6 Punkte) Berechnen Sie für das vorliegende Problem die Intensität in der Detektorebene $z = \mathrm{const.}$ Verwenden Sie $p = p' + \mathrm{i}p''$ (mit p', p'' reell) und $\exp[-\mathrm{i}kxx_0/z)] \approx [1 - \mathrm{i}kxx_0/z]$.

Unter den Annahmen, dass die Detektorausdehnung viel kleiner sei als der Abstand z zum Detektor, die Auslenkung x_0 sehr klein sei gegenüber der Wellenlänge, und dass gelte $p' = 0$ (dies entspricht $\alpha \approx \mathrm{i}\alpha''$), kann die Intensität in der Detektorebene wie folgt dargestellt werden (hier sind I_0, I_s und $I_{0,s}$ ortsunabhängige Konstanten)

$$I(x) \approx I_0 + (kz)^{-2} I_s + (kz)^{-1}(kxx_0/z)\, I_{0,s}. \tag{5}$$

(e) (4 Punkte) Interpretieren Sie in wenigen Worten die Herkunft der drei Terme in Gl. (5) im Kontext des vorliegenden Interferenzexperiments mit einfallendem und gestreutem Feld.

(f) (4 Punkte) Die Fläche des oberen Detektors erstrecke sich von $x = [0 \ldots x_A]$ und $y = [-y_A/2 \ldots y_A/2]$. Geben Sie zunächst einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Intensität und Leistung an. Berechnen Sie sodann die Leistung P_+ mithilfe der Intensität in Gleichung (5). Bestimmen Sie in analoger Weise die Leistung P_-. Hier erstrecke sich der Detektor von $x = [-x_A \ldots 0]$.

(g) (2 Punkte) Berechnen Sie das Differenzsignal $\Delta P(t)$.

3. Überlapp und Gauss'sche Strahlen (35 Punkte)

Wir betrachten zwei beliebige monochromatische Felder $\underline{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r})$ und $\underline{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r})$ im Vakuum. Ihr Überlapp U, ein komplexwertiger Skalar, sei in der Ebene $z = 0$ definiert als

$$U = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \; \underline{\mathbf{E}}_1^*(x, y, z = 0) \cdot \underline{\mathbf{E}}_2(x, y, z = 0), \tag{6}$$

wobei die Integrationsgrenzen in dieser Aufgabe, sofern nicht anders angegeben, jeweils von $-\infty$ bis ∞ reichen.

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass (abgesehen von einem numerischen Faktor) der Überlapp im Realraum laut Gl. (6) gleich jenem im Fourierraum ist, so dass der Überlapp aus den Feldwinkelspektren berechnet werden kann nach

$$U \propto \int \mathrm{d}k_x \int \mathrm{d}k_y \; \hat{\underline{\mathbf{E}}}_1^*(k_x, k_y, z = 0) \cdot \hat{\underline{\mathbf{E}}}_2(k_x, k_y, z = 0). \tag{7}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung der δ-Distribution als $\int \mathrm{d}x \exp[\mathrm{i}ux] = 2\pi\delta(u)$.

(b) (2 Punkte) Verwenden Sie Ihr Wissen über die Propagation des Feldwinkelspektrums um zu zeigen, dass für propagierende (d.h. nicht evaneszente) Felder der Überlapp U von der Wahl der Ebene z unabhängig ist.

Wir wenden uns nun konkreten Feldverteilungen zu und betrachten einen modifizierten Gauss'schen Strahl, dessen Feldverteilung in seiner Fokusebene $z = 0$ laute (es seien w_0 und E_a reell)

$$\underline{\mathbf{E}}_1(x, y, z = 0) = E_a \frac{x}{w_0} \exp\left[-(x^2 + y^2)/w_0^2\right] \mathbf{n}_x. \tag{8}$$

(c) (2 Punkte) Erstellen Sie eine Skizze des Betrags der Feldverteilung $\underline{\mathbf{E}}_1(x, y = z = 0)$. Beschriften Sie Ihre Achsen und normieren Sie diese sinnvoll.

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie die Intensitätsverteilung des modifizierten Gauss'schen Strahles aus Gl. (8) in der Ebene $z = 0$.

(e) (2 Punkte) Erstellen Sie eine Skizze der Intensitätsverteilung entlang der x Achse. Beschriften Sie Ihre Achsen und normieren Sie diese sinnvoll.

(f) (5 Punkte) Berechnen Sie das Feldwinkelspektrum des modifizierten Gauss'schen Strahles $\hat{\underline{\mathbf{E}}}_1(k_x, k_y, z = 0)$.
Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp[-ax^2 + \mathrm{i}bx] = \sqrt{\pi/a} \exp[-b^2/(4a)]$. Beachten Sie, dass Sie $\underline{\mathbf{E}}_1$ als Ortsableitung eines regulären Gauss'schen Strahles schreiben können. Verwenden Sie zudem Ihr Wissen über das Verhalten von Ableitungen unter der Fouriertransformation.

(g) (4 Punkte) Geben Sie zunächst einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Feldwinkelspektrum und Fernfeld an. Formulieren Sie dann das Fernfeld $\underline{\mathbf{E}}_{1,\infty}(x, y, z)$ des modifizierten Gauss'schen Strahles im Realraum in grossem Abstand $r \gg w_0$, wobei r den Abstand zum Ursprung bezeichne.

Wir ziehen zu unserer Betrachtung noch ein weiteres Feld hinzu. Es handle sich um einen regulären Gauss'schen Strahl, dessen Feld in der Ebene $z = 0$ laute (es sei E_b reell)

$$\underline{\mathbf{E}}_2(x, y, z = 0) = E_b \exp\left[-(x^2 + y^2)/w_0^2\right] \mathbf{n}_x. \tag{10}$$

(h) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Überlapp der Felder $\underline{\mathbf{E}}_1$ und $\underline{\mathbf{E}}_2$.
Hinweis: Eine Symmetriebetrachtung mag Ihnen die Arbeit deutlich erleichtern. Wenn Sie eine solche verwenden, begründen Sie Ihr Ergebnis kurz.

(i) (4 Punkte) Wir superponieren nun die Felder $\underline{\mathbf{E}}_1$ und $\underline{\mathbf{E}}_2$. Berechnen Sie die resultierende Intensitätsverteilung I_{12}.

Wir rotieren nun die Polarisationsrichtung des regulären Gauss'schen Strahls und betrachten das Feld (es sei E_c reell)

$$\underline{\mathbf{E}}_3(x, y, z = 0) = E_c \exp\left[-(x^2 + y^2)/w_0^2\right] \mathbf{n}_y. \tag{11}$$

(j) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Überlapp der Felder $\underline{\mathbf{E}}_2$ und $\underline{\mathbf{E}}_3$. Begründen Sie Ihr Ergebnis kurz.

(k) (2 Punkte) Berechnen Sie die Intensitätsverteilung I_{13} in der Ebene $z = 0$, die sich aus der Superposition der Felder $\underline{\mathbf{E}}_1$ und $\underline{\mathbf{E}}_3$ ergibt.

(l) (2 Punkte) Wir betrachten weiterhin I_{13}. Wie müssen Sie das Verhältnis E_a/E_c wählen, damit die Intensität $I_{13}(x, y = z = 0)$ um $x = 0$ in führender Ordnung quartisch in x (also mit x^4) skaliert?

(m) (2 Punkte) Skizzieren Sie I_{13} entlang der x Achse mit dem eben gefundenen Verhältnis von E_a zu E_c. Liegt Ihnen kein Ergebnis vor, so bedenken Sie die gewünschte Skalierung in x. Beschriften Sie Ihre Achsen und normieren Sie diese sinnvoll.