Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10S)

25. Januar 2019, 09:00-12:00 Uhr, HG D3.2

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte beachten Sie:

- Diese Prüfung besteht aus 4 Aufgaben. Die Angabe umfasst 3 beidseitig bedruckte Blätter exklusive dieses Deckblatts. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **10 eigenhändig beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Bücher, Vorlesungsmaterialien, ausgedruckte Dokumente und elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.
- Geben Sie dieses Deckblatt für Ihre Lösungen mit ab. Unterschreiben Sie dieses Deckblatt.
- Lösungen sind zu begründen und Zwischenrechnungen nachvollziehbar anzugeben. Nicht eindeutig lesbare Passagen bleiben unbewertet!
- Benutzen Sie einen dokumentenechten schwarzen oder blauen Stift (**kein Rotstift, kein radierbarer Stift**). Verwenden Sie keine Korrekturhilfen (z.B. Tipp-Ex oder Tintenlöscher). **Mit Korrekturhilfen oder radierbarem Stift bearbeitete Passagen bleiben unbewertet!**
- Schreiben Sie nicht direkt auf die Angabe oder das Deckblatt. Lösungen auf Angabenblättern bleiben unbewertet!
- Verwenden Sie Ihr mitgebrachtes Papier im Format A4 für Ihre Lösungen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige Hinweise von allgemeinem Interesse werden während der Prüfung laut mitgeteilt.

Viel Erfolg!

Unterschrift Student/-in: ____________________________

Aufgabe	Punkte	Visum Korrektor
1	/15	
2	/20	
3	/35	
4	/30	
Total:	/100	

Rückseite Deckblatt, leer

1 Allgemeine Fragen (15 Punkte)

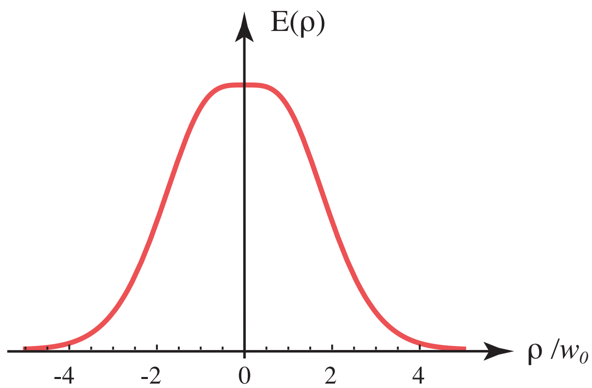
1. (2 Punkte) Beschreiben Sie die Ergänzung, welche Maxwell am Ampr̀e'schen Gesetz vorgenommen hat. In Worten und in Form von Gleichungen.
2. (1 Punkte) Eine ebene Welle fällt auf einen Film bestehend aus zwei parallelen Grenzflächen ein. Alle Medien sind homogen und linear, haben jedoch unterschiedliche Permittivitäten. Wieviele linear unabhängige Randbedingungen sind nötig, um das transmittierte Feld zu bestimmen?
3. (2 Punkte) Wieso werden die Potentiale $\phi(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ eingeführt? Geben Sie mindest zwei Gründe.
4. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ und einer Ladung q keine Arbeit verursachen kann.
5. (2 Punkte) Erklären Sie, weshalb bei frustrierter Totalreflexion das Feld im Luftspalt zwischen den dielektrischen Medien generell nicht exponentiell abfällt.
6. (2 Punkte) Ein elektromagnetisches Feld das durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ charakterisiert wird hat insgesamt 6 Vektorkomponenten. Wieviele dieser Vektorkomponenten müssen bekannt sein, damit das Feld in einem Wellenleiter eindeutig bestimmt ist? Welche Vektorkomponenten sind dies?
7. (2 Punkte) Erklären Sie wieso die abgestrahlte Leistung einer Antenne von seiner Umgebung abhängt.
8. (2 Punkte) Wir möchten eine Mode in einem unendlich langen dielektrischen Wellenleiter mit einem äusseren Feld $\mathbf{E}$ anregen. Die Propagationskonstante der Mode sei k_z und die Kreisfrequenz ω. Der Wellenleiter wird von Vakuum umgeben. Welche Eigenschaften muss das äussere Feld haben?

2 Krümmungsfreier Laserstrahl (20 Punkte)

Wir möchten einen Laserstrahl entwickeln, dessen Feldverteilung in der fokalen Ebene $(z=0)$ keine Krümmung auweist. Eine mögliche Realisierung ist

$$\mathbf{E}(x,y,z\!=\!0) \;=\; E_0\left[\frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-\rho^2/(2w_0)^2} \;-\; \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\rho^2/w_0^2}\right]\,\mathbf{n}_\mathrm{x}\,, \tag{1}$$

wobei $\rho = [x^2+y^2]^{1/2}$ und $w_0 \gg \lambda$ eine Konstante ist. Dieses Feld ist in der Figur unten dargestellt. Es hat die Eigenschaft, dass die Krümmung $d^2\mathbf{E}\,/\,d\rho^2$ im Ursprung gleich null ist. Das Feld ist monochromatisch und hat die Wellenlänge λ.



1. (4 Punkte) Leiten Sie das räumliche Spektrum $\hat{\mathbf{E}}$ in der Ebene $z=0$ her.
   Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-s^2/A \,+\, \mathrm{i}sB\right]\, ds = \sqrt{\pi A}\,\exp\left[-A\,B^2/4\right]$.

2. (4 Punkte) Bestimmen Sie anhand von $\hat{\mathbf{E}}$ in der Ebene $z=0$ das Feld $\mathbf{E}(x,y,z)$ in irgendeinem Raumpunkt $z<0$. Hinweis: Beschreiben Sie die Vorgehensweise. Keine Rechnung nötig.

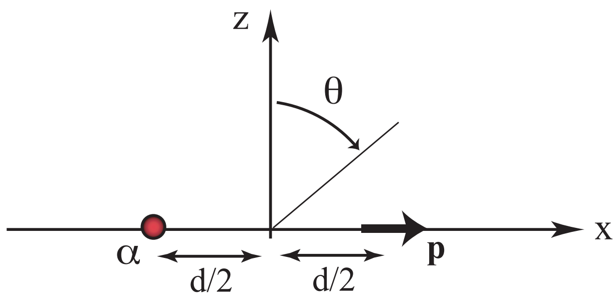
3. (4 Punkte) Bestimmen Sie das Fernfeld $\mathbf{E}_\infty$ in Richtung $z\to+\infty$.

4. (4 Punkte) Wie gross muss der Abstand z mindestens sein, damit das Fernfeld $\mathbf{E}_\infty$ eine gültige Approximation für das Feld $\mathbf{E}(x,y,z)$ ist?

5. (4 Punkte) Diskutieren Sie was passiert, wenn im Feld (1) der Parameter w_0 kleiner als λ wird. Wie wirkt sich dies auf das Fernfeld aus?

3 Wechselwirkung mit rotierendem Dipol (35 Punkte)

Wir betrachten einen rotierenden Dipol (Kreisfrequenz ω) mit Ursprung $(x, y, z) = (d/2, 0, 0)$. Siehe Figur.



Das komplexe Dipolmoment lautet

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathrm{p}_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

1. (2 Punkte) Wie lautet das reelle, zeitabhängige Dipolmoment $\mathbf{p}_1(t)$?

Ein polarisierbares Objekt befindet sich am Orte $(x, y, z) = (-d/2, 0, 0)$. Das Objekt ist viel kleiner als die Wellenlänge λ und wird durch die Polarisierbarkeit α beschrieben. Dementsprechend gilt für das induzierte komplexe Dipolmoment des Objektes

$$\mathbf{p}_2 = \alpha \, \mathbf{E}_1(-d/2, 0, 0) ,$$

wobei $\mathbf{E}_1$ das einfallende äussere elektrische Feld ist. Zudem ist $d \ll \lambda$ was uns erlaubt, die Nahfeldnäherung zu gebrauchen. Die Green'sche Funktion, die nur die Nahfelder berücksichtigt, lautet Die Green'sche Funktion lautet

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp[\mathrm{i}kR]}{4\pi k^2 R^3} \left[3\frac{\mathbf{RR}}{R^2} - \overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} \right] ,$$

wobei $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. $\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}$ bezeichnet den Einheitstensor und $\mathbf{RR}$ ist das äussere Produkt.

2. (5 Punkte) Ausgehend von $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0$ bestimmen Sie das Feld $\mathbf{E}_1$ verursacht durch den rotierenden Dipol $\mathbf{p}_1$ am Orte des polarisierbaren Objektes.

3. (1 Punkte) Bestimmen sie den Dipol $\mathbf{p}_2$ der durch das Nahfeld $\mathbf{E}_1(-d/2, 0, 0)$ induziert wird.

4. (2 Punkte) Beschreiben Sie die Dynamik des induzierten Dipols $\mathbf{p}_2$. Ist diese ebenfalls eine gleichförmige Rotation? Ist die Rotation in der gleichen Richtung?

Der induzierte Dipol $\mathbf{p_2}$ generiert nun selbst ein Feld $\mathbf{E}_2$, welches auf den ursprünglichen Dipol $\mathbf{p}_1$ zurückwirkt.

5. (5 Punkte) Bestimmen Sie das Feld $\mathbf{E}_2(d/2, 0, 0)$ verursacht durch den induzierten Dipol $\mathbf{p}_2$ am Orte des primären Dipols $\mathbf{p}_1$. Berücksichtigen Sie wiederum nur die Nahfelder. Drücken Sie das Resultat als Funktion von $\mathbf{p}_1$ und α aus.

6. (5 Punkte) Berechnen Sie, wie sich die Präsenz des polarisierbaren Objektes auf die abgestrahlte Leistung P des rotierenden Dipols $\mathbf{p}_1$ auswirkt.

Bisher wurde angenommen, dass der primäre Dipol und das resultierende Feld zeitharmonisch sind (Kreisfrequenz ω), was uns erlaubt die komplexe Schreibweise

$$\mathbf{p}_2 \;=\; \alpha\,\mathbf{E}_1\,, \tag{2}$$

zu verwenden. Wir betrachten nun einen beliebigen zeitlichen Prozess und repräsentieren das zeitabhängige Feld anhand seiner zeitlichen Fouriertransformation

$$\mathbf{E}_1(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}_1(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,d\omega\;.$$

Analoge Ausdrücke gelten für die zeitabhängige Polarisierbarkeit $\alpha(t)$ und den induzierten Dipol $\mathbf{p}_2(t)$.

7. (3 Punkte) Repräsentieren Sie den linearen Prozess in Gleichung (2) im Zeitbereich (für $\mathbf{p}_2(t)$, $\alpha(t)$, und $\mathbf{E}_1(t)$) sowie im Frequenzbereich (für $\hat{\mathbf{p}}_2(\omega)$, $\hat{\alpha}(\omega)$, und $\hat{\mathbf{E}}_1(\omega)$).

Wir kehren nun zum zeitharmonischen Fall zurück und ersetzen das polarisierbare Objekt durch einen zweiten rotierenden Dipol (Kreisfrequenz ω). Das komplexe Dipolmoment

$$\mathbf{p}_2 \;=\; \frac{\mathrm{p}_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}$$

ist im Betrag gleich wie $\mathbf{p}_1$ aber mit entgegengesetzter Rotationsrichtung. Wir sind am Fernfeld $\mathbf{E}^{(1,2)}$ interessiert, das von den beiden Dipolen $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ generiert wird.

8. (2 Punkte) Leiten Sie das Fernfeld $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) = [E_x, E_y, E_z]$ von Dipol $\mathbf{p}_1$ mit Ursprung $\mathbf{r}' = (0,0,0)$ her. Hinweis: Im Fernfeld lautet die Green'sche Funktion

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0^{\infty}(\mathbf{r},\mathbf{r}'=0) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2}\right]\;.$$

9. (4 Punkte) Benutzen Sie nun die Fraunhofer-Näherung, um das Fernfeld $\mathbf{E}^{(1)} = [E_x, E_y, E_z]$ von Dipol $\mathbf{p}_1$ mit Ursprung $\mathbf{r}' = (d/2, 0, 0)$ herzuleiten.

10. (4 Punkte) In Analogie, bestimmen Sie das Fernfeld $\mathbf{E}^{(2)}$ des zweiten Dipols $\mathbf{p}_2$ bei $\mathbf{r}' = (-d/2, 0, 0)$, sowie das gemeinsame Feld $\mathbf{E}^{(1,2)} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}$.

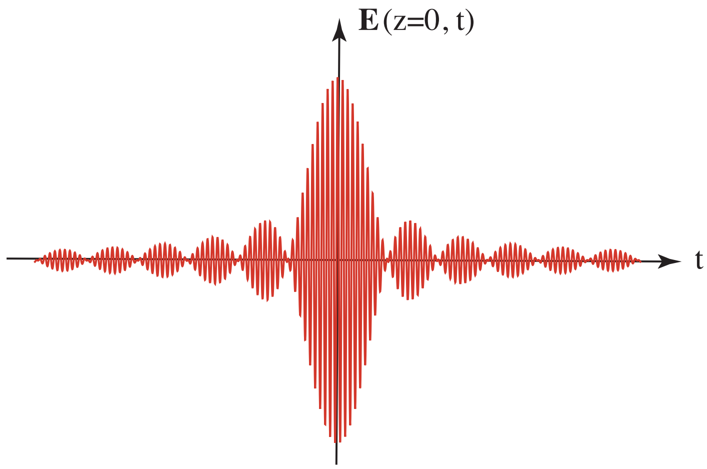
11. (2 Punkte) Betrachten Sie nun den Fall $d \to 0$. Welcher Quelle entspricht das resultierende Fernfeld?

4 Pulspropagation in einem homogenen Kristall (30 Punkte)

Am Ort $\mathbf{r}=0$ lautet das Feld eines elektromagnetischen Pulses (siehe Figur)

$$\mathbf{E}(z=0,t) \;=\; E_0\,\cos\omega_0 t\,\frac{\sin\Delta\omega\,t}{\Delta\omega\,t}\,\mathbf{n}_x\,.$$

Dabei ist $\omega_0 \gg \Delta\omega$. Der Puls propagiert im freien Raum (Vakuum).



Der Puls propagiert im freien Raum entlang der z Achse und das Feld ist näherungsweise unabhängig von den Koordinaten x und y (Strahldurchmesser $\gg \lambda$).

1. (3 Punkte) Bestimmen sie das Feld des Pulses an beliebigem Orten, d.h. $\mathbf{E}(z,t)$. Hinweis: Keine Rechnung.

2. (2 Punkte) Formulieren Sie zwei Differentialgleichungen, welchen das Feld $\mathbf{E}(z,t)$ genügen muss und in welchen $\mathbf{E}(z,t)$ die einzige unbekannte Funktion ist. Hinweis: Keine Rechnung erforderlich.

3. (7 Punkte) Berechnen sie das zeitliche Spektrum $\hat{\mathbf{E}}(z,\omega)$ des Pulses. Hinweis:
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(As)}{(As)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Bs}\,ds \;=\; \begin{cases}\pi/A & -A<B<A\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

4. (3 Punkte) Skizzieren sie die spektrale Energiedichte $\left|\hat{\mathbf{E}}(z,\omega)\right|^2$ als Funktion von ω.

5. (3 Punkte) Zeigen sie, dass $\hat{\mathbf{E}}(z,\omega)$ die Helmholtz Gleichung erfüllt.

6. (4 Punkte) Der Puls propagiert nun in einem homogenen dispersiven Kristall. Dieser ist charakterisiert durch $\varepsilon(\omega)$ und $\mu(\omega)$. Wie muss das Spektrum $\hat{\mathbf{E}}(z,\omega)$ angepasst werden? Welcher Gleichung muss $\hat{\mathbf{E}}(z,\omega)$ jetzt genügen?

7. (4 Punkte) Der Puls propagiert im Kristall in positiver z Richtung zur Grenzfläche ($z=0$) zwischen Kristall und Vakuum. Bestimmen sie das Spektrum $\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{ref}}(z,\omega)$ des von der Oberfläche reflektierten Pulses. Betrachten Sie den senkrechten Einfall.

8. (4 Punkte) Wie berechnet sich das elektrische Feld $\mathbf{E}_{\mathrm{ref}}(z,t)$ des reflektierten Pulses? Hinweis: keine Rechnung.