Vorname **Name**
Nummer, ITET
email@student.ethz.ch
Lfd.Nr.: /161

Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10S)

11. August 2018, 09:00-12:00 Uhr, HIL G15

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte beachten Sie:

- Diese Prüfung besteht aus 4 Aufgaben. Die Angabe umfasst 3 beidseitig bedruckte Blätter exklusive dieses Deckblatts. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **10 eigenhändig beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Bücher, Vorlesungsmaterialien, ausgedruckte Dokumente und elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.
- Geben Sie dieses Deckblatt für Ihre Lösungen mit ab. Unterschreiben Sie dieses Deckblatt.
- Lösungen sind zu begründen und Zwischenrechnungen nachvollziehbar anzugeben. Nicht eindeutig lesbare Passagen bleiben unbewertet!
- Benutzen Sie einen dokumentenechten schwarzen oder blauen Stift (**kein Rotstift, kein radierbarer Stift**). Verwenden Sie keine Korrekturhilfen (z.B. Tipp-Ex oder Tintenlöscher). **Mit Korrekturhilfen oder radierbarem Stift bearbeitete Passagen bleiben unbewertet!**
- Schreiben Sie nicht direkt auf die Angabe oder das Deckblatt. Lösungen auf Angabenblättern bleiben unbewertet!
- Verwenden Sie Ihr mitgebrachtes Papier im Format A4 für Ihre Lösungen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige Hinweise von allgemeinem Interesse werden während der Prüfung laut mitgeteilt.

Viel Erfolg!

Unterschrift Student/-in: ____________________

Aufgabe	Punkte	Visum Korrektor
1	/20	
2	/30	
3	/20	
4	/30	
Total:	/100	

Rückseite Deckblatt, leer

1. Eigenschaften der Maxwell Gleichungen (20 Punkte)

Wir betrachten die Maxwell Gleichungen für die komplexen Amplituden

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathrm{i}\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\mathrm{i}\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \tag{4}$$

Hinweis: Die Divergenz- und Rotationsoperatoren in sphärischen Koordinaten lauten

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} =& \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\phi \sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\mathbf{n}_r \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\phi\right)\right)\mathbf{n}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{n}_\phi.\end{aligned} \tag{6}$$

(a) (1 Punkt) Welche Einheit (ausgedrückt durch C, V, m, s) hat die Stromdichte $\mathbf{j}$?

(b) (3 Punkte) Argumentieren Sie, warum eine statische Ladungsverteilung ρ stets ein konservatives elektrisches Feld erzeugt.
Hinweis: Ein Feld $\mathbf{F}$ ist konservativ, wenn ein Potential U existiert, so dass gilt $\mathbf{F} = \nabla U$.

(c) (5 Punkte) Wir betrachten weiterhin die komplexen Felder. Drücken Sie $\mathbf{H}$ durch $\mathbf{B}$ und die Magnetisierung $\mathbf{M}$, sowie $\mathbf{D}$ durch $\mathbf{E}$ und die Polarisierung $\mathbf{P}$ aus. Leiten Sie sodann die Wellengleichung für $\mathbf{E}$ her, so dass alle Quellterme auf der rechten Seite der Gleichung stehen.

Wir betrachten im Folgenden das komplexe Feld einer Ladungsdichte ρ im Vakuum, die ausserhalb eines endlichen Quellgebiets um den Ursprung verschwindet. Das komplexe elektrische Feld laute

$$\mathbf{E}(r,\theta,\phi) = A\,\frac{\sin^2\phi\,\sin^2\theta}{r^2}\,\mathbf{n}_r, \tag{7}$$

wobei $\mathbf{n}_r$ der radiale Einheitsvektor und A eine reelle Konstante seien.

(d) (2 Punkte) Erfüllt das gegebene elektrische Feld die Maxwell Gleichung (1)?

(e) (3 Punkte) Bestimmen Sie die netto Ladung q der Ladungsdichte ρ.
Hinweis: $\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = 4/3$.

(f) (3 Punkte) Bestimmen Sie das zum elektrischen Feld Gl. (7) gehörige Magnetfeld $\mathbf{H}(\mathbf{r})$.

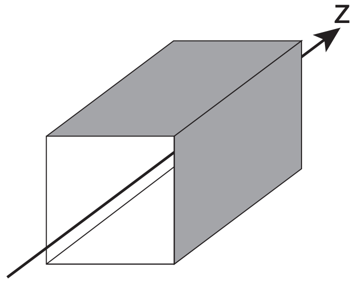
(g) (3 Punkte) Überprüfen Sie, ob Ihr Magnetfeld $\mathbf{H}$ die Maxwell-Gleichung (4) erfüllt.

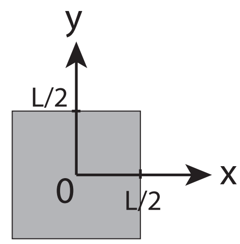
2. Felder eines Wellenleiters (30 Punkte)

Wir betrachten einen mit einem Medium mit Brechungsindex n gefüllten Wellenleiter mit quadratischem Querschnitt und Seitenlänge L aus perfekt leitendem Material. Die z Achse befinde sich im Zentrum des Wellenleiters. Für die longitudinalen Felder im Inneren des Wellenleiters gelte mit $E_0 \in \mathbb{R}$

$$E_z(x,y,z) \;=\; E_0 \cos[\pi x/L] \cos[\pi y/L] \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \,, \tag{15}$$

$$H_z(x,y,z) \;=\; 0. \tag{16}$$





(a) (1 Punkt) Um welche Wellenleitermode handelt es sich in der gängigen Terminologie?

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie das reelle longitudinale Feld $E_z(x,y,z,t)$.

(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie mithilfe des Feldes E_z und der Helmholtzgleichung die Dispersionsrelation $k_z(\omega)$.

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Grenzfrequenz (cut-off) ω_c, unter welcher keine Wellenausbreitung stattfinden kann.

(e) (7 Punkte) Bestimmen Sie die komplexen transversen elektrischen Felder E_x und E_y der Wellenleitermode.

(f) (2 Punkte) Überprüfen Sie, ob Ihr komplexes elektrisches Feld im Wellenleiter divergenzfrei ist.

(g) (3 Punkte) Berechnen Sie das Magnetfeld $\mathbf{H}(\mathbf{r})$.

Wir betrachten ab sofort eine andere Feldkonfiguration im Wellenleiter, deren Feldkomponenten lauten mit $E_0, H_0, H' \in \mathbb{R}$

$$E_x = -\mathrm{i}E_0 \cos(\pi x/L)\sin(\pi y/L), \qquad H_x = \mathrm{i}H_0 \sin(\pi x/L)\cos(\pi y/L), \tag{17}$$

$$E_y = +\mathrm{i}E_0 \sin(\pi x/L)\cos(\pi y/L), \qquad H_y = \mathrm{i}H_0 \cos(\pi x/L)\sin(\pi y/L), \tag{18}$$

$$E_z = 0, \qquad H_z = H' \sin(\pi x/L)\sin(\pi y/L). \tag{19}$$

(h) (5 Punkte) Berechnen Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor im Wellenleiter. Hinweis: Es gilt $\sin^2(a)\cos^2(b) + \cos^2(a)\sin^2(b) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2a)\cos(2b)\right]$.

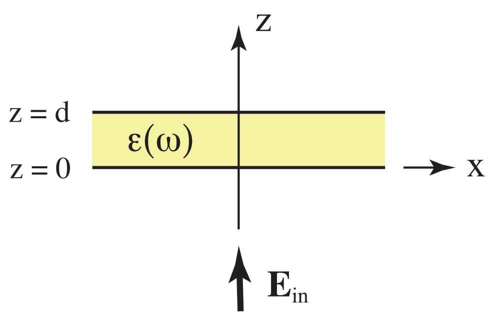
(i) (4 Punkte) Berechnen Sie den netto Energiefluss U durch den Wellenleiter.

3. Signalpropagation (20 Punkte)

Signale zwischen einem Satelliten und einer Erdstation werden über zwei veschiedene Frequenzkanäle bei den Mittelfrequenzen ω_1 und ω_2 übermittelt. Zwischen Erde und Satellit befindet sich die Ionosphäre, welche wir als eine Schicht der Dicke d beschreiben. Die Schicht sei unmagnetisch ($\mu = 1$) und habe die dielektrische Funktion

$$\varepsilon(\omega) \;=\; 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\,,$$

wobei ω_p eine Konstante (genannt Plasmafrequenz) bezeichnet. Wie in der Abbildung dargestellt, betrachten wir zunächst eine einfallende ebene Welle mit variabler Frequenz ω, die senkrecht auf die Schicht trifft. Ausserhalb der Schicht befinde sich Vakuum.



Das einfallende komplexe elektrische Feld habe die Form

$$\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}) \;=\; E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 z}\,\mathbf{n}_{\text{x}},$$

mit $\mathbf{n}_{\text{x}}$ dem Einheitsvektor in x Richtung und $k_0 = \omega/c$.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie das komplexe magnetische Feld $\mathbf{H}_{\text{in}}(\mathbf{r})$ und schreiben Sie es als Funktion der elektrischen Feldamplitude E_0 und der Wellenimpedanz Z_0.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie den Wellenvektor $\mathbf{k}$ in der Ionosphäre.

Um die reflektierten und transmittierten Felder zu berechnen, drücken wir das gesamte elektrische und magnetische Feld durch komplexe Teilfelder aus:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \begin{cases} \mathbf{E}^{(1)} & (z<0) \\ \mathbf{E}^{(2)} & (0<z<d) \\ \mathbf{E}^{(3)} & (z>d) \end{cases}\,, \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r}) \;=\; \begin{cases} \mathbf{H}^{(1)} & (z<0) \\ \mathbf{H}^{(2)} & (0<z<d) \\ \mathbf{H}^{(3)} & (z>d) \end{cases}$$

(c) (5 Punkte) Formulieren Sie einen Ansatz für alle Felder $\mathbf{E}^{(i)}$ und $\mathbf{H}^{(i)}$ unter Verwendung von E_0 und mit den Wellenimpedanzen Z_0 (freier Raum) und Z (Schicht).
Hinweis: Achten Sie darauf, in den zutreffenden Raumbereichen die Felder

durch zwei gegenläufige Teilfelder darzustellen. Führen Sie hierzu geeignete Teilfeldamplituden ein.

(d) (1 Punkt) Wieviele unbekannte Feldamplituden gibt es insgesamt und welche sind dies? Wieviele Randbedingungen benötigen Sie, um das Problem zu lösen?

(e) (5 Punkte) Wie lauten die Randbedingungen für die Felder mit deren Hilfe Sie sich die gesuchten Feldamplituden beschaffen können? Anhand der Randbedingungen, erstellen Sie ein Gleichungssystem in Matrixform für die unbekannten (Teil-)Feldamplituden.

Für Frequenzen ω, die viel grösser sind als die Plasmafrequenz ω_p, gilt

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} \approx 1 - \omega_p^2/(2\omega^2).$$

(f) (4 Punkte) Anhand der Dispersionsrelation $k(\omega)$ in der Schicht, bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit $v_p(\omega)$ und die Gruppengeschwindigkeit $v_g(\omega)$. Bringen Sie beide in die Form $v = c/[1 \pm A]$, wobei A von Ihnen passend zu bestimmen ist. Welche der Geschwindigkeiten ist grösser?

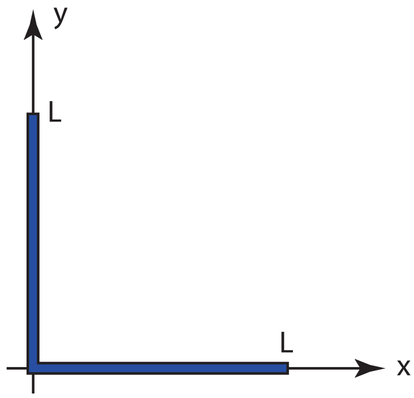
(g) (2 Punkte) Bestimmen Sie die zeitliche Verzögerung Δt zwischen einem Signalpuls mit Mittelfrequenz ω_1 und einem Signalpuls mit Mittelfrequenz ω_2 nach Durchgang durch die Schicht.

4. Strahlung eines stromführenden Drahtes (30 Punkte)

Wir betrachten einen (unendlich dünnen) stromführenden Draht der Länge $2L$ in Vakuum, der nach der halben Länge um $90°$ geknickt ist, wie in der Abbildung skizziert. Die reelle Stromdichte laute

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \;=\; I_0\cos(\omega t)\begin{cases}\cos[\pi x/(2L)]\,\delta(y)\,\delta(z)\,\mathbf{n}_\mathrm{x} & (0\le x\le L),\\ \cos[\pi y/(2L)]\,\delta(x)\,\delta(z)\,\mathbf{n}_\mathrm{y} & (0\le y\le L),\end{cases}$$

wobei I_0 den Strom und $\mathbf{n}_\mathrm{x}$, $\mathbf{n}_\mathrm{y}$ Einheitsvektoren bezeichnen.



(a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Ladungsdichte ρ.
Hinweis: Ignorieren Sie die Unstetigkeit am Ursprung.

Wir betrachten zunächst nur das Teilstück entlang der x Achse.

(b) (3 Punkte) Formulieren Sie für das Teilstück entlang der x Achse die komplexe Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ und die komplexe Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$.

(c) (1 Punkt) Geben Sie einen Ausdruck an (ohne diesen auszuwerten), mithilfe dessen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aus der Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ berechnen können.

Wir berechnen im Folgenden das elektrische Feld des Teilstücks entlang der x Achse über den Umweg des Skalarpotentials $\phi(\mathbf{r})$ und des Vektorpotentials $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Wir beschränken uns dabei auf die Felder in grossem Abstand vom Quellgebiet, so dass gilt $\mathbf{r} \gg \mathbf{r}'$. Wir benötigen für unsere Betrachtung die skalare Green'sche Funktion

$$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=\; \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,. \tag{23}$$

(d) (5 Punkte) Wenden Sie die Fraunhofer Näherung auf die skalare Green'sche Funktion in Gl. (23) an. Nennen Sie explizit die beiden gemachten Näherungen.

(e) (2 Punkte) Geben Sie einen Ausdruck an (ohne diesen auszuwerten), mit dem Sie mithilfe der skalaren Green'schen Funktion das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ für eine beliebige Stromdichte $\mathbf{j}$ berechnen können. Auf welcher Eichung beruht der von Ihnen angeführte Ausdruck für $\mathbf{A}$?

(f) (4 Punkte) Berechnen Sie nun das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ in der Fraunhofer Näherung, das vom entlang der x Achse zeigenden Drahtstück generiert wird.

(g) (2 Punkte) Geben Sie Ausdrücke an (ohne diese auszuwerten), mithilfe derer Sie aus den Potentialen $\mathbf{A}$ und ϕ die komplexen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ berechnen können.

(h) (4 Punkte) Wir transformieren das Vektorpotential $\mathbf{A}$ durch Addition der Funktion $f(\mathbf{r}, t) = \mathrm{i}\mathbf{k} \exp[\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \mathrm{i}\omega t]$ zu $\mathbf{A}'$. Wie lautet das zugehörige Skalarpotential ϕ', damit die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ unverändert bleiben?

Nachdem die Felder für das erste Antennenteilstück bestimmt sind, kann die Rechnung für das zweite Teilstück wiederholt werden. Das gesamte Antennenfeld ist dann die Summe beider Teilfelder. Um uns eine Vorstellung der Abstrahlcharakteristik zu verschaffen, nehmen wir nun an, dass die Antennenlänge sehr klein ist, also $L \ll \lambda$. Wir beschreiben die durch den geknickten Draht realisierte Antenne durch ein Dipolpaar $\mathbf{p}_\mathrm{x} = p\,\mathbf{n}_\mathrm{x}$ und $\mathbf{p}_\mathrm{y} = p\,\mathbf{n}_\mathrm{y}$ im Koordinatenursprung.

(i) (3 Punkte) Verwenden Sie die Ihnen bekannte Green'sche Funktion für den elektrischen Dipol, um die Green'sche Funktion für das Fernfeld herzuleiten. Geben Sie explizit an, welche Näherungen Sie gemacht haben und begründen Sie diese.

(j) (3 Punkte) Verwenden Sie nun die Green'sche Funktion des Fernfeldes, um das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(x, y, z)$ des Dipolpaares in kartesischen Koordinaten und unter Verwendung kartesischer Einheitsvektoren an einem beliebigen Beobachtungspunkt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ zu formulieren.