Vorname **Name**
Nummer, ITET
email@student.ethz.ch
Lfd.Nr.: /2

Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10S)

1. Februar 2018, 09:00-12:00 Uhr, IFW A 34

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte beachten Sie:

- Diese Prüfung besteht aus 4 Aufgaben. Die Angabe umfasst 2 beidseitig bedruckte Blätter exklusive dieses Deckblatts. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **10 eigenhändig beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Bücher, Vorlesungsmaterialien, ausgedruckte Dokumente und elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.
- Geben Sie dieses Deckblatt für Ihre Lösungen mit ab. Unterschreiben Sie dieses Deckblatt.
- Lösungen sind zu begründen und Zwischenrechnungen nachvollziehbar anzugeben. Nicht eindeutig lesbare Passagen bleiben unbewertet!
- Benutzen Sie einen dokumentenechten schwarzen oder blauen Stift (**kein Rotstift, kein radierbarer Stift**). Verwenden Sie keine Korrekturhilfen (z.B. Tipp-Ex oder Tintenlöscher). **Mit Korrekturhilfen oder radierbarem Stift bearbeitete Passagen bleiben unbewertet!**
- Schreiben Sie nicht direkt auf die Angabe oder das Deckblatt. Lösungen auf Angabenblättern bleiben unbewertet!
- Verwenden Sie Ihr mitgebrachtes Papier im Format A4 für Ihre Lösungen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige Hinweise von allgemeinem Interesse werden während der Prüfung laut mitgeteilt.

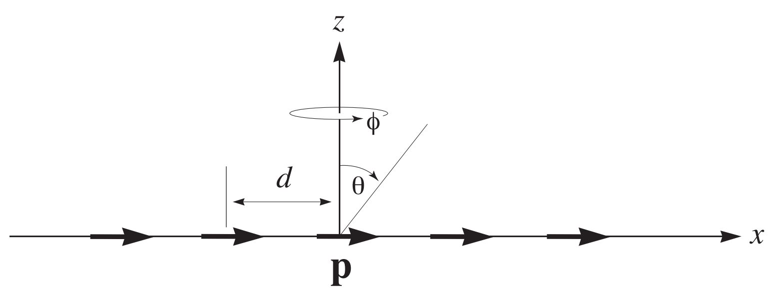
Viel Erfolg!

Unterschrift Student/-in: ____________________

Aufgabe	Punkte	Visum Korrektor
1	/30	
2	/30	
3	/20	
4	/20	
Total:	/100	

1 Lineare Phased-Array Antenne (30 Punkte)

Wir betrachten eine Antenne im Vakuum, die aus einer linearen Kette von elektrischen Dipolen besteht. Wie in der Figur unten illustriert, sind die Dipole entlang ihrer Verbindungslinie ausgerichtet und haben jeweils einen Abstand von d. Die Abstrahlungsrichtung θ kann durch die Phase φ zwischen benachbarten Dipolen kontrolliert werden. Die Betriebswellenlänge ist λ und der Betrachtungsabstand vom Zentrum $r = |\mathbf{r}|$ ist viel grösser als die Gesamtlänge der Antenne, was uns erlaubt die Fraunhofer Näherung zu gebrauchen.



1. (5 Punkte) Verwenden Sie die Green'sche Funktion des freien Raumes, um das komplexe elektrische Fernfeld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ eines einzelnen Dipols $\mathbf{p}$, gelegen am Ort $\mathbf{r}'$, in kartesischen Koordinaten und Einheitsvektoren an einem beliebigen Beobachtungspunkt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ zu formulieren.

Für die Berechnung der Felder der linearen Dipolkette betrachten wir zunächst nur einen einzelnen strahlenden Dipol $\mathbf{p} = p\,\mathbf{n}_x$ im Ursprung, den wir dann um die Distanz d mehrfach entlang der x-Achse versetzen. In sphärischen Koordinaten lauten die einzigen nicht verschwindenden Komponenten des komplexen Fernfeldes eines am Ursprung gelegenen und entlang der x-Achse ausgerichteten Dipols

$$\begin{aligned} E_\theta(R,\theta,\phi) &= \omega^2\mu_0\, p\,\frac{\exp[\mathrm{i}kR]}{4\pi R}\,\cos\phi\,\cos\theta \\ E_\phi(R,\theta,\phi); &= -\omega^2\mu_0\, p\,\frac{\exp[\mathrm{i}kR]}{4\pi R}\,\sin\phi. \end{aligned} \tag{1}$$

2. (4 Punkte) Verwenden Sie das Fernfeld $\mathbf{E} = (E_\theta,\, E_\phi)$, um die Intensität $I_0(R,\theta,\phi)$ eines einzelnen Dipols im Fernfeld zu berechnen.
3. (4 Punkte) Anhand der Intensität I_0 berechnen Sie die abgestrahlte Leistung P_0 eines einzelnen Dipols. Hinweis: $\int_0^\pi \sin x\,\cos^2 x\; dx = 2/3$.

Wir betrachten nun einen Dipol, dessen Position vom Ursprung um eine Distanz $\Delta x = nd$ entlang der x Achse versetzt wird. Dabei ist n eine ganze Zahl.

4. (6 Punkte) Verwenden Sie die Fraunhofer Approximation, um das komplexe Fernfeld $E_\theta(r,\theta,\phi)$ eines um Δx versetzten Dipols zu berechnen.

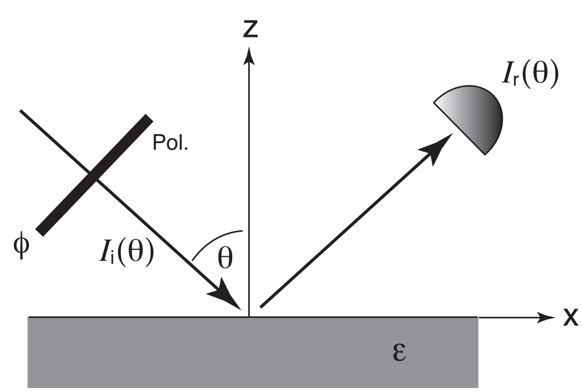
5. (6 Punkte) Berechnen Sie das gesamte Feld in der Ebene $y = 0$ das von unendlich vielen Dipolen, die symmetrisch zur x Achse angeordnet sind, generiert wird. In welche Richtung θ wird am meisten Leistung abgestrahlt?
   Hinweis: $\sum_{n=1}^{\infty} \cos[nx] = \pi\, \delta(x) - 1/2$, wobei $\delta(x)$ die Dirac'sche Deltafunktion ist.

Die Dipole werden jetzt phasenverschoben betrieben, das heisst, dass für die Dipolmomente $p|_{x=nd} = p_0 \exp[\mathrm{i}n\vartheta]$ gilt. Dabei bezeichnet $p|_{x=nd}$ das Dipolmoment am Ort $x = nd$ und φ ist eine variable Phase.

6. (5 Punkte) In welche Richtung θ wird jetzt am meisten abgestrahlt?

2 Ellipsometrie (30 Punkte)

Ellipsometrie ist eine Messmethode für die Bestimmung der komplexen Dielektrizitätskonstante ε eines Materials. Wie in der Figur unten dargestellt, wird ein Laserstrahl mit Kreisfrequenz ω unter einem Winkel θ auf die Oberfläche des zu untersuchenden Materials gesandt. Mit einem Polarisator lässt sich der Polarisationswinkel ϕ des einfallenden Lichts einstellen. Die Intensität des reflektierten Strahls wird detektiert. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass alle Felder als ebene Wellen beschreibbar sind. Die magnetische Permeabilität jeglicher Medien sei $\mu = 1$.



Der Polarisator wird zunächst so eingestellt, dass die auf die Oberfläche einfallende Welle s polarisiert ist. Die Intensität der Welle sei I_i.

1. (3 Punkte) Bestimmen Sie das auf die Oberfläche einfallende elektrische Feld $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t)$ und dessen Amplitude E_0. Wählen Sie die Phase so, dass E_0 rein reell ist.

2. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass das von Ihnen bestimmte zeitabhängige Feld divergenzfrei ist und dass es die Wellengleichung erfüllt.

3. (3 Punkte) Bestimmen Sie das reflektierte elektrische Feld $\mathbf{E}_\mathrm{r}(\mathbf{r}, t)$ unter Verwendung eines passenden Koeffizienten zur Beschreibung der Reflexion.

4. (5 Punkte) Drücken Sie den Reflexionskoeffizienten durch die gegebenen Parameter ε, ω und θ aus.

5. (2 Punkte) Der Detektor misst die Intensität I_r des reflektierten Strahles. Bestimmen Sie das Intensitätsverhältnis $I_\mathrm{r}/I_\mathrm{i}$.

6. (3 Punkte) Da ε eine komplexe Grösse ist, ist das Intensitätsverhältnis im Fernfeld nicht ausreichend, um ε zu bestimmen. Wie könnte man vorgehen, um das komplexe ε zu bestimmen?

Wir nehmen nun an, dass der Einfallswinkel $\theta = 45°$ ist und der Polarisationswinkel auf $45°$ eingestellt ist, sodass gleich viel s wie p Polarisation auf die Oberfläche trifft. Die Dielektrizitätskonstante ε des Materials sei so gewählt, dass sie die Reflexionskoeffizienten $r^s = 1$ für s Polarisation und $r^p = \mathrm{i}$ für p Polarisation bedinge.

7. (5 Punkte) Bestimmen Sie das komplexe reflektierte Feld $\mathbf{E}_\mathrm{r}(\mathbf{r})$ und diskutieren Sie dessen Polarisationseigenschaften.

8. (3 Punkte) Überprüfen Sie, dass die reflektierte Welle die gleiche Intensität wie die einfallende Welle hat.

9. (3 Punkte) Diskutieren Sie was sich ändern würde, wenn des Material durch einen Film der (unbekannten) Dicke d mit (unbekanntem) komplexen Materialparameter ε ersetzt würde. Dabei sind die Materialeigenschaften des Substrates, auf dem der Film aufgetragen ist, bekannt. Wieviele linear unabhängige Messungen sind jetzt nötig um den Materialparameter des Filmes zu bestimmen?

3 Von der Elektrostatik zur Elektrodynamik (15 Punkte)

Wir betrachten eine stationäre Ladungsdichteverteilung $\rho(\mathbf{r}')$, die das Skalarpotential

$$\phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \tag{2}$$

generiert. Wir setzen $\mathbf{r} \notin V$ voraus.

1. (2 Punkte) Welcher Differentialgleichung genügt das Skalarpotential?

2. (2 Punkte) Leiten Sie anhand ϕ das elektrostatische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ her.

3. (4 Punkte) Die Ladungsdichteverteilung ändert sich jetzt zeitlich, das heisst $\rho = \rho(\mathbf{r}', t)$. Wie muss die Lösung (2) geändert werden und welcher Gleichung genügt sie jetzt?

4. (2 Punkte) Ist Ihre Lösung von der Eichung abhängig? Wenn ja, welche Eichung haben Sie gewählt?

5. (3 Punkte) Kann das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ anhand des Skalarpotentials $\phi(\mathbf{r},t)$ hergeleitet werden? Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?

6. (2 Punkte) Ist das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ von der Eichung abhängig?

4 Reflexion eines elektromagnetischen Pulses an der Ionosphäre (15 Punkte)

Am Ort $z=0$ lautet das Feld eines elektromagnetischen Pulses

$$\mathbf{E}(z=0,t) \;=\; \mathbf{E}_0\,\cos[\omega_0\,t]\,\mathrm{e}^{-t^2/T^2}\,,$$

wobei T die Pulsdauer ist und ω_0 die Mittelfrequenz. Der Puls propagiert im freien Raum entlang der z Achse und das Feld ist näherungsweise unabhängig von den Koordinaten x und y (Strahldurchmesser $\gg \lambda$).

1. (2 Punkte) Formulieren Sie das Feld des Pulses an beliebigen Orten, d.h. $\mathbf{E}(z,t)$.

2. (1 Punkte) Welcher Differentialgleichung muss dieses Feld genügen? Begründen Sie (ohne Rechnung), wieso das Feld dieser Gleichung genügt.

Das Spektrum $\hat{\mathbf{E}}(z,\omega)$ berechnet sich wie folgt:

$$\hat{\mathbf{E}}(z,\omega) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(z,t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,dt \;=\; \frac{\mathbf{E}_0}{4\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z/c}\,T\left[\mathrm{e}^{-(\omega-\omega_0)^2T^2/4}+\mathrm{e}^{-(\omega+\omega_0)^2T^2/4}\right].$$

Dieses Resultat kann, aber muss nicht, im Folgenden verwendet werden.

3. (4 Punkte) Berechnen Sie die Leistung W, die eine Fläche A (in der xy Ebene) durchdringt. Hinweis: Prüfen Sie die Einheiten und verwenden Sie gegebenenfalls die Relation

$$\int_{\infty}^{-\infty}\mathrm{e}^{-A^2x^2}\cos^2(Bx)\,dx \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2A}}\left[1+\mathrm{e}^{-B^2/A^2}\right].$$

Der Puls propagiert von der Erde aus $(z=0)$ und trifft senkrecht auf die Ionosphäre. Die Ionosphäre kann durch ein homogenes Medium mit Grenzfläche bei $z=z_0$ und dem Brechungsindex $n(\omega)=\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ eines Plasmas beschrieben werden. Die relative magnetische Permeabilität sei $\mu=1$.

4. (4 Punkte) Bestimmen Sie das Spektrum $\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{ref}}(z=0,\omega)$ des reflektierten Pulses

5. (4 Punkte) Erklären Sie, wie Sie das Feld $\mathbf{E}_{\mathrm{ref}}(z=0,t)$ des reflektierten Pulses berechnen. Hinweis: Die Ausführung der Rechnung ist nicht erforderlich.