Vorname **Name**
Nummer, ITET
email@student.ethz.ch
Lfd.Nr.: /150

Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10S)

14. August 2017, 14:00-17:00 Uhr, HIL C15/D15

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte beachten Sie:

- Diese Prüfung besteht aus 4 Aufgaben. Die Angabe umfasst 2 beidseitig bedruckte Blätter exklusive dieses Deckblatts. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **10 eigenhändig beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Bücher, Vorlesungsmaterialien, ausgedruckte Dokumente und elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht erlaubt.
- Geben Sie dieses Deckblatt für Ihre Lösungen mit ab. Unterschreiben Sie dieses Deckblatt.
- Lösungen sind zu begründen und Zwischenrechnungen nachvollziehbar anzugeben. Nicht eindeutig lesbare Passagen bleiben unbewertet!
- Benutzen Sie einen dokumentenechten schwarzen oder blauen Stift (**kein Rotstift, kein radierbarer Stift**). Verwenden Sie keine Korrekturhilfen (z.B. Tipp-Ex oder Tintenlöscher). **Mit Korrekturhilfen oder radierbarem Stift bearbeitete Passagen bleiben unbewertet!**
- Schreiben Sie nicht direkt auf die Angabe oder das Deckblatt. Lösungen auf Angabenblättern bleiben unbewertet!
- Verwenden Sie Ihr mitgebrachtes Papier im Format A4 für Ihre Lösungen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige Hinweise von allgemeinem Interesse werden während der Prüfung laut mitgeteilt.

Viel Erfolg!

Unterschrift Student/-in: ____________________________

Aufgabe	Punkte	Visum Korrektor
1	/35	
2	/15	
3	/15	
4	/35	
Total:	/100	

Rückseite Deckblatt, leer

1 Strahlungsdruck eines Strahles mit Bahndrehimpuls (35 Pkt.)

Wir betrachten einen monochromatischen Strahl im Vakuum mit Kreisfrequenz ω, der endlichen elektromagnetischen Bahndrehimpuls besitzt. Wir beschränken uns in dieser Aufgabe auf die Betrachtung der Felder innerhalb der Rayleighlänge des Strahles. Mit einer reellen Feldamplitude E_0 und dem Strahlradius w_0 lauten die komplexen elektrischen und magnetischen Felder des Strahles in erster Näherung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathrm{in}}(x,y,z) &= \frac{E_0}{w_0}\,[x\;+\;\mathrm{i}\,y]\;\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/w_0^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\,\mathbf{n}_{\mathrm{x}}\,, \\ \mathbf{H}^{\mathrm{in}}(x,y,z) &= \frac{E_0}{w_0}\,[x\;+\;\mathrm{i}\,y]\;\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/w_0^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\,\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,\mathbf{n}_{\mathrm{y}}\;, \end{aligned} \tag{1}$$

(a) (3 Pkt.) Berechnen Sie aus obigen Feldern den zeitgemittelten Poyntingvektor des Strahles.

(b) (4 Pkt.) Schliessen Sie vom Poyntingvektor auf die Intensität und skizzieren Sie die Intensitätsverteilung $I^{\mathrm{in}}(r)$ in einer beliebigen Ebene $z = \mathrm{const.}$, wobei r den Abstand von der z-Achse bezeichne. Beschriften Sie Ihre Achsen sinnvoll.

(c) (6 Pkt.) Berechnen Sie die Leistung P^{in} des einfallenden Strahls.
Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} s^2 \exp\left[-s^2\right]\,\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}/2$, sowie $\int_0^{\infty} s^3 \exp\left[-s^2\right]\mathrm{d}s = 1/2$.

(d) (4 Pkt.) Schreiben Sie das komplexe Feld $\mathbf{E}^{\mathrm{in}}$ in der Ebene $z = 0$ als Produkt einer reellen Amplitude und einer Exponentialfunktion mit einer geeigneten ortsabhängigen Phase ϕ, und bestimmen Sie die Phasenänderung für einen geschlossenen Weg um die Strahlachse (z-Achse) herum.
Kommentar: Diese Phasenänderung entspricht dem elektromagnetischen Bahndrehimpuls.

(e) (4 Pkt.) Der Strahl falle ab sofort aus der negativen z-Richtung kommend senkrecht auf eine ideal reflektierende Oberfläche bei $z = 0$. Bestimmen Sie das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}^{\mathrm{ref}}(x,y,z)$ des reflektierten Strahls. Zeigen Sie, dass Ihre Lösung die Randbedingung für das elektrische Feld an der Grenzfläche erfüllt.

(f) (7 Pkt.) Die Normalkomponente F_z der Kraft auf die reflektierende Oberfläche lautet

$$F_z \;=\; \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\;\left[\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2\;+\;\mu_0|\mathbf{H}|^2\right]\;, \tag{2}$$

wobei $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ die gesamten komplexen Felder (einfallende und reflektierte) bezeichnen und die Integration über eine beliebige Fläche $z = \mathrm{const.}$ vor der reflektierenden Fläche auszuführen ist. Formulieren Sie zunächst die gesamten Felder und danach die Kraft. Verwenden Sie für das reflektierte Magnetfeld

$$\mathbf{H}^{\mathrm{ref}}(x,y,z) = \frac{E_0}{w_0}\,[x\;+\;\mathrm{i}\,y]\;\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/w_0^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\,\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,\mathbf{n}_{\mathrm{y}}\;. \tag{3}$$

(g) (7 Pkt.) Die Felder $\mathbf{E}^{\mathrm{in}}$ und $\mathbf{H}^{\mathrm{in}}$ sind Approximationen und erfüllen die Maxwell-Gleichungen nicht. Wir suchen nun ein korrigiertes elektrisches Feld $\mathbf{E}^{\mathrm{in}}_{\mathrm{corr}}$. Nehmen Sie an, dass gilt $\mathbf{E}^{\mathrm{in}}_{\mathrm{corr}} \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{y}} = 0$ und $\mathbf{E}^{\mathrm{in}}_{\mathrm{corr}} \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{x}} = \mathbf{E}^{\mathrm{in}} \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{x}}$, und leiten Sie anhand der Divergenzfreiheit von $\mathbf{E}^{\mathrm{in}}_{\mathrm{corr}}$ das longitudinale Feld $E^{\mathrm{in}}_{\mathrm{z,corr}} = \mathbf{E}^{\mathrm{in}}_{\mathrm{corr}} \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{z}}$ her.

2 Felder eines rotierenden Dipols (15 Pkt.)

Wir betrachten einen Dipol, der im Vakuum in der xy-Ebene mit der Kreisfrequenz ω rotiere. Es sei p_0 reell und das komplexe Dipolmoment laute

$$\mathbf{p} = \frac{p_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{4}$$

(a) (3 Pkt.) Bestimmen Sie das reelle zeitabhängige Dipolmoment $\mathbf{p}(t)$. Für einen Beobachter auf der positiven z-Achse, rotiert der Dipol im oder gegen den Uhrzeigersinn?

(b) (4 Pkt.) Verwenden Sie die Green'sche Funktion des Vakuums, um das komplexe elektrische Feld des rotierenden Dipols zu formulieren.
Hinweis: Verwenden Sie die Abkürzungen $A = 1 + \frac{\mathrm{i}kR-1}{k^2R^2}$ und $B = \frac{3-3\mathrm{i}kR-k^2R^2}{k^2R^2}$, um Ihre Ausdrücke handlich zu halten.

(c) (4 Pkt.) Leiten Sie aus Ihrem Feld aus der Teilaufgabe (b) das komplexe Fernfeld des rotierenden Dipols ab. Begründen Sie, warum Sie welche Terme behalten oder vernachlässigen.

(d) (4 Pkt.) Berechnen Sie das komplexe und das reelle Fernfeld des rotierenden Dipols an einem Punkt entlang der positiven z-Achse. Wie ist der Polarisationszustand des Feldes (bei Blickrichtung des Beobachters zur Quelle)?

3 Projektion von Feldern (15 Pkt.)

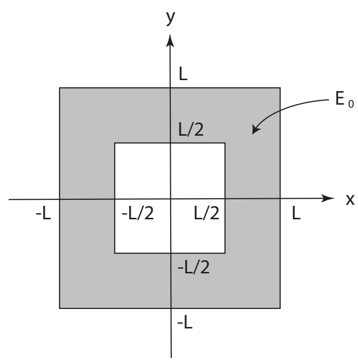
Ein Triumphbogen soll mit folgendem komplexen Feld der Kreisfrequenz ω beleuchtet werden

$$\mathbf{E}_\infty(x,y) \;=\; \mathbf{E}_0\left[\mathrm{rect}\left(\frac{x}{L}\right)\,\mathrm{rect}\left(\frac{y}{L}\right)\;-\;\mathrm{rect}\left(\frac{2x}{L}\right)\,\mathrm{rect}\left(\frac{2y}{L}\right)\right]\,. \tag{5}$$

Hier seien $\mathbf{E}_0$ eine reelle Feldamplitude und L eine gegebene Länge. Das betrachtete Medium sei Vakuum. Das Gebäude befinde sich in der Fraunhofer-Zone der Lichtquelle und der Abstand zwischen Gebäude und Lichtquelle sei R. Die Funktion rect ist wie folgt definiert

$$\mathrm{rect}(z) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } |z|<1, \\ 0 & \text{für } |z|>1. \end{cases} \tag{6}$$

Die Feldverteilung ist in folgender Abbildung dargestellt.



(a) (5 Pkt.) Berechnen Sie das räumliche Spektrum $\hat{\mathbf{E}}(k_x,k_y;z\!=\!0)$ des Quellenfeldes $\mathbf{E}(x,y;z\!=\!0)$ in der Ebene $z=0$ der Lichtquelle.

(b) (7 Pkt.) Berechnen Sie die Feldverteilung $\mathbf{E}(x,y;z=0)$ in der Ebene der Lichtquelle unter der Annahme, dass gilt $k_z \approx k$. Formulieren Sie Ihr Ergebnis kompakt unter Verwendung der Funktion $\mathrm{sinc}(x)=\sin(x)/x$.

(c) (3 Pkt.) Der Durchmesser der Lichtquelle sei D. Wir gross muss der Abstand R, ausgedrückt durch D und Vakuumwellenlänge λ, sein, damit die Fraunhofer-Näherung gültig ist?

4 Teilchentransport im Hohlleiter (35 Pkt.)

Wir betrachten einen vakuumgefüllen, perfekt reflektierenden Hohlleiter entlang der z-Achse, mit den Seitenlängen L in x-Richtung und $L/2$ in y-Richtung. Es bezeichne $\omega = 2\pi c/\lambda$ die Kreisfrequenz, λ die Vakuumwellenlänge und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

(a) (5 Pkt.) Bestimmen Sie den Wellenlängenbereich (als Funktion von L), für welchen nur eine propagierende Mode im betrachteten Wellenleiter existiert. Wie bezeichnet man diese Mode in der üblichen TE/TM$_{nm}$ Nomenklatur?

(b) (4 Pkt.) Für den Fall $\lambda = 3L/2$, bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit v_p der propagierenden Mode in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit.

(c) (6 Pkt.) Für den Fall $\lambda = 3L/2$, bestimmen Sie die Gruppengeschwindigkeit v_g der propagierenden Mode und drücken Sie diese in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit aus.

Im Folgenden betrachten wir eine Wellenleitermode, deren komplexes elektrisches Feld gegeben sei durch

$$\mathbf{E}(x, y, z) \;=\; E_0 \sin[\frac{2\pi}{L} y]\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}\, \mathbf{n}_x \;, \tag{7}$$

wobei E_0 reell sei und gelte $k_z = \sqrt{\omega^2/c^2 \,-\, 4\pi^2/L^2}$.

(d) (2 Pkt.) Handelt es sich bei der betrachteten Mode um eine TE- oder eine TM-Mode? Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) (4 Pkt.) Berechnen Sie mithilfe einer Maxwell-Gleichung das komplexe magnetische Feld $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ der betrachteten Mode.

Der in positive z-Richtung propagierenden betrachteten Mode der Kreisfrequenz ω werde nun eine identische Mode mit gleicher Kreisfrequenz aber mit umgekehrter Propagationsrichtung entgegen geschickt. Das gesamte elektrische Feld sei $\mathbf{E}_{\mathrm{tot}}$. Die relative Phase der rückpropagierenden Welle ϕ_0 sei so gewählt, dass die elektrische Feldamplitude am Ursprung ($z = 0$) ein Maximum hat.

(f) (4 Pkt.) Formulieren Sie das zeitabhängige elektrische Feld $\mathbf{E}_{\mathrm{tot}}(\mathbf{r}, t)$ im Wellenleiter in Gegenwart der beiden gegenläufig propagierenden Moden und bestimmen Sie die Phase ϕ_0 passend.

(g) (4 Pkt.) Bestimmen Sie die elektrische Energiedichte $w_e = (\varepsilon_0/2)\langle \mathbf{E}_{\mathrm{tot}}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_{\mathrm{tot}}(\mathbf{r}, t)\rangle$, wobei $\langle \ldots \rangle$ das zeitliche Mittel bezeichne.

In den Maxima von w_e können einzelne Atome durch optische Kräfte eingefangen werden. Um diese Atome durch den Wellenleiter fortzubewegen, werde die Kreisfrequenz der in negative z-Richtung propagierenden Mode um den Betrag $\Delta\omega \ll \omega$ verstimmt, so dass die vorwärtspropagierende Mode die Kreisfrequenz ω habe, und die rückwärtspropagierende Mode die Kreisfrequenz $\omega + \Delta\omega$.

(h) (6 Pkt.) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_e mit der sich die Energiedichtemaxima entlang des Wellenleiters fortbewegen. Drücken Sie v_e aus durch $\Delta\omega$, ω, c, und L (sowie numerische Konstanten).
Hinweis: Berechnen Sie erneut die Energiedichte. Mitteln Sie jedoch lediglich über die schnellen Oszillationen, um zeitlich langsame Änderungen zu berücksichtigen.