Vorname **Name**
Matrikelnummer, Departement
Mail@Address.com
Lfd.Nr.: x/total

Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10S)

07. Februar 2017, 09:00-12:00 Uhr, LFW B 1

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte beachten Sie:

- Diese Prüfung besteht aus 3 Aufgaben. Die Angabe umfasst 2 beidseitig bedruckte Blätter exklusive dieses Deckblatts. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **10 beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Bücher, Vorlesungsmaterialien und elektronische Geräte sind nicht erlaubt.
- Geben Sie dieses Deckblatt für Ihre Lösungen mit ab. **Unterschreiben** Sie dieses Deckblatt.
- Lösungen sind zu begründen und Zwischenrechnungen nachvollziehbar anzugeben. Nicht eindeutig lesbare Passagen bleiben unbewertet!
- Benutzen Sie einen dokumentenechten schwarzen oder blauen Stift (kein Rotstift, kein radierbarer Stift). Verwenden Sie keine Korrekturhilfen (z.B. Tipp-Ex oder Tintenlöscher). **Mit Korrekturhilfen oder radierbarem Stift bearbeitete Passagen bleiben unbewertet!**
- Schreiben Sie **nicht direkt auf die Angabe oder das Deckblatt**. Lösungen auf Angabenblättern bleiben unbewertet!
- Versehen Sie **jedes Blatt mit Ihrem Namen**.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige Hinweise von allgemeinem Interesse werden während der Prüfung laut mitgeteilt.

Viel Erfolg!

Unterschrift Student/-in: ____________________________

Aufgabe	Punkte	Visum Korrektor
1	**/25**	
2	**/25**	
3	**/50**	
Total:	**/100**	

Rückseite Deckblatt, leer

1 Interferenz einer zylindrischen und einer ebenen Welle (25 Punkte)

Ein zeitlich mit Kreisfrequenz ω entlang eines unendlich langen Drahtes oszillierender Strom generiert eine auslaufende zylindrische Welle. Wir betrachten einen solchen Draht, der im Vakuum entlang der z-Achse ausgerichtet sei und den Radius a besitze. In grossem Abstand (viel grösser als Drahtradius und Wellenlänge) vom Draht lautet das komplexe elektrische Feld

$$\mathbf{E}_1(\rho) \;=\; E_0 \sqrt{\frac{a}{\rho}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}\, \mathbf{n}_z \;, \tag{1}$$

wobei $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ die radiale Koordinate, E_0 eine reelle elektrische Feldamplitude und $\mathbf{n}_z$ den Einheitsvektor entlang der z-Achse bezeichnen.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie das reelle elektrische Feld $\mathbf{E}_1(\rho, t)$.

(b) (2 Punkte) In welche Richtung zeigt das komplexe magnetische Feld $\mathbf{H}_1(\rho)$ in grossem Abstand von der Quelle? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Die explizite Berechnung des Magnetfeldes sollte zur Beantwortung der Frage nicht notwendig sein.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die magnetische Feldamplitude H_0 des Fernfeldes als Funktion von E_0 in Gl. (1).
Hinweis: Verwenden Sie einen Ihnen bekannten Zusammenhang zwischen transversalen elektrischen und magnetischen Feldern.

(d) (3 Punkte) Berechnen Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor $\langle \mathbf{S}_1(\rho)\rangle$ im Fernfeld des Drahtes.

(e) (4 Punkte) Berechnen Sie die abgestrahlte Leistung P pro Längeneinheit z.

Der zylindrischen Welle werde nun eine ebene Welle der Form

$$\mathbf{E}_2(y) \;=\; E_0 \sqrt{\frac{a}{y_0}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ky+\varphi)}\, \mathbf{n}_z \tag{2}$$

überlagert, wobei φ eine konstante Phase, E_0 wiederum die reelle elektrische Feldamplitude, und $\sqrt{a/y_0}$ einen Skalierungsfaktor bezeichnen.

(f) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Intensitätsverteilung $I(x, y, z)$ in der Ebene $y = y_0$ im Grenzfall $ky_0 \gg 1$ und $x \ll y_0$ gilt

$$I(x, y_0, z) = \frac{E_0^2}{Z}\,\frac{a}{y_0}\left(1 \,+\, \cos\left[\frac{kx^2}{2y_0} - \varphi\right]\right). \tag{3}$$

(g) (2 Punkte) Wie muss die Phase φ gewählt werden, damit die Intensität in Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle maximal wird?

(h) (6 Punkte) Skizzieren Sie die normierte Intensitätsverteilung $I(x, y_0, 0)/I_2$ entlang der x-Achse in der Ebene $y = y_0$ im Fall $\varphi = 0$, wobei I_2 die Intensität der ebenen Welle sei. Tragen Sie auf der Horizontalen die dimensionslose Grösse $x\sqrt{\frac{k}{2y_0}}$ auf. Beschriften Sie Ihre Achsen, markieren Sie auf der Ordinate die Minimal- und die Maximalintensität (in Einheiten von I_2) und geben Sie auf der Abszisse die beiden ersten Minima (in Einheiten von $\sqrt{\frac{k}{2y_0}}$) in positiver x-Richtung an.

2 Energietransport durch evaneszente Wellen (25 Punkte)

Eine in der xz-Ebene propagierende ebene Welle mit Kreisfrequenz ω falle aus der negativen z-Richtung kommend auf eine Grenzfläche bei $z = -z_0$ ein, an der sie total reflektiert wird. Im Raumbereich $z > -z_0$ befinde sich Vakuum, und das komplexe magnetische Feld dort laute

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \;=\; \mathrm{H}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_z(z+z_0)}\, \mathbf{n}_y \;, \tag{4}$$

wobei H_0 reell sei. Der parallele Wellenvektor k_x sei durch einen effektiven Brechungsindex $n_{\text{eff}} > 1$ beschrieben, und die Wellenzahl im Vakuum $k = \omega/c$ sei wie folgt bestimmt

$$k_x \;=\; n_{\text{eff}}\, k \;. \tag{5}$$

(a) (3 Punkte) Drücken Sie k_z durch n_{eff} und k aus und argumentieren Sie, warum es sich im Bereich $z > -z_0$ um eine evaneszente Welle handelt.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ der evaneszenten Welle.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass sowohl das komplexe magnetische Feld $\mathbf{H}_1$ als auch das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}_1$ divergenzfrei sind.

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass sowohl das komplexe magnetische Feld $\mathbf{H}_1$ als auch das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}_1$ die quellfreie Helmholtzgleichung erfüllen.

(e) (4 Punkte) Bestimmen Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor $\langle \mathbf{S} \rangle$ im Bereich $z > -z_0$.

(f) (1 Punkt) Berechnen Sie den Leistungsfluss durch eine Fläche A in der Ebene $z = 0$.

Dem bislang betrachteten evaneszenten Feld werde nun ein zweites evaneszentes Feld überlagert, das jedoch von der Ebene $z = +z_0$ in negative z-Richtung abfalle und weiterhin relativ zum ersten Feld um ϕ phasenverschoben sei. Das komplexe magnetische Feld dieser zweiten elektromagnetischen Welle laute im Raumbereich $z < z_0$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \;=\; \mathrm{H}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x - \mathrm{i}k_z(z-z_0)}\, \mathbf{n}_y \;, \tag{6}$$

wobei noch stets $k_x = n_{\text{eff}}\, k$ gelte.

(g) (2 Punkte) Bestimmen Sie die totalen elektrischen und magnetischen Felder im Bereich $-z_0 < z < z_0$.
Hinweis: Ignorieren Sie mögliche Reflexionen an den Grenzflächen.

(h) (4 Punkte) Berechnen Sie die z-Komponente des zeitgemittelten Poyntingvektors $\langle S_z \rangle$ für das gesamte Feld.

(i) (1 Punkt) Für welche Phasenwinkel ϕ wird der Energiefluss in negativer z-Richtung maximal?

(j) (2 Punkte) Nehmen Sie knapp Stellung zu der Aussage "Evaneszente Felder transportieren keine Energie." Wie ist der Energietransport in der vorliegenden Aufgabe zu erklären?

3 Paralleles Dipolpaar mit variabler Phasendifferenz (50 Punkte)

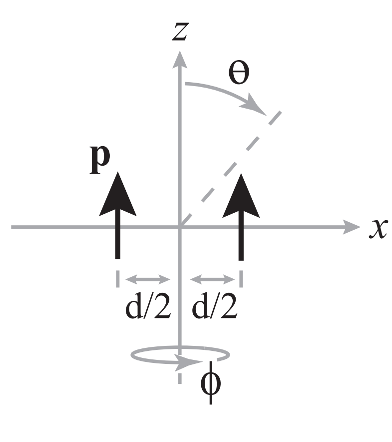
Als kleine Vorarbeit für die folgende Aufgabe betrachten wir einen am Ursprung gelegenen, bei der Kreisfrequenz ω oszillierenden und in x-Richtung orientierten elektrischen Dipol mit komplexem Dipolmoment $\mathbf{p} = p\,\mathbf{n}_x$ in einem homogenen Medium mit Materialkonstanten ε und μ.

(a) (5 Punkte) Verwenden Sie die Ihnen bekannte Green'sche Funktion für den elektrischen Dipol, um das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(x, y, z)$ des Dipols in kartesischen Koordinaten und unter Verwendung kartesischer Einheitsvektoren an einem beliebigen Beobachtungspunkt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ zu formulieren.

(b) (6 Punkte) Leiten Sie aus dem in Teilaufgabe (a) bestimmten Gesamtfeld das komplexe elektrische Nahfeld des Dipols in kartesischen Koordinaten unter Verwendung kartesischer Einheitsvektoren ab. Begründen Sie kurz, welche Terme Sie vernachlässigen und unter welchen Umständen das Nahfeld eine gute Beschreibung des Dipolfeldes liefert.
Ihr Ergebnis sollte von der Oszillationsfrequenz ω unabhängig sein. Argumentieren Sie knapp, warum diese Tatsache Sinn ergibt.

(c) (5 Punkte) Leiten Sie aus dem in Teilaufgabe (a) bestimmten Gesamtfeld das komplexe elektrische Fernfeld des Dipols ab. Begründen Sie kurz, welche Terme Sie vernachlässigen und unter welchen Umständen das Fernfeld eine gute Beschreibung des Dipolfeldes liefert.

Wir verlassen ab sofort den bislang betrachteten x-orientierten Dipol und wenden uns dem elektromagnetischen Feld zweier zeitharmonisch bei der Kreisfrequenz ω oszillierender Dipole zu, die bei den Positionen $x = -d/2$ und $x = d/2$ auf der x-Achse angeordnet sind. Beide Dipolmomente haben identischen Betrag $|p|$ und Orientierung entlang der z-Richtung, besitzen jedoch eine relative Phasenverschiebung α. Wie üblich messen wir den Polarwinkel θ relativ zur z-Achse und den Azimuthalwinkel ϕ in der xy-Ebene relativ zur x-Achse, wie in der folgenden Abbildung gezeigt. Das umgebende Medium sei ab sofort Vakuum.



(d) (4 Punkte) Für den Fall $d \to 0$, bestimmen Sie die Werte von α, bei denen die vom Dipolpaar abgestrahlte Leistung maximal beziehungsweise minimal wird. Geben Sie die Minimal- und die Maximalleistung an in Einheiten der von einem einzelnen Dipol abgestrahlten Leistung P_0.
Hinweis: Es ist keine Rechnung erforderlich. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

(e) (2 Punkte) Wir möchten die Fernfelder der beiden Dipole mit Abstand d in der Fraunhofer-Näherung beschreiben. Wie gross muss der Abstand des Beobachtungspunktes vom Ursprung in Relation zum Dipolabstand d sein, damit die Fraunhofer-Näherung ein valides Ergebnis liefert?

Für die Berechnung der Felder des Dipolpaares betrachten wir zunächst nur einen einzelnen strahlenden Dipol $\mathbf{p} = p\,\mathbf{n}_z$ im Ursprung, den wir dann um die Distanz $d/2$ entlang der x-Achse versetzen. In sphärischen Koordinaten lauten die einzigen nicht verschwindenden Komponenten des komplexen Fernfeldes eines am Ursprung gelegenen und entlang der z-Achse ausgerichteten Dipols

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\omega^2 \mu_0 \mu\, \mathrm{p}\, \frac{\exp[\mathrm{i}kr]}{4\pi r} \sin\theta\, \mathbf{n}_\theta\ , \\ \mathbf{H} &= -\frac{\omega^2}{c}\, \mathrm{p}\, \frac{\exp[\mathrm{i}kr]}{4\pi r} \sin\theta\, \mathbf{n}_\phi . \end{aligned} \tag{7}$$

(f) (6 Punkte) Verwenden Sie die Fraunhofer Approximation, um die komplexen Feldkomponenten $E_\theta(r,\theta,\phi)$ und $H_\phi(r,\theta,\phi)$ eines einzelnen Dipols, gelegen am Ort $\mathbf{r}' = (d/2, 0, 0)$, in sphärischen Koordinaten zu berechnen.

(g) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass die Fraunhofer Approximation die abgestrahlte Leistung P_0 der versetzten Dipolantenne nicht verändert, dass also P_0 unabhängig von d ist.

(h) (5 Punkte) Berechnen Sie nun das gemeinsame Fernfeld $\mathbf{E}^{\mathrm{tot}} = E_\theta^{\mathrm{tot}} \mathbf{n}_\theta$ des Antennenpaars. Berücksichtigen Sie die Phasenverschiebung α zwischen den Dipolantennen.

Für die Phasenverschiebung gelte ab sofort und für den Rest der Aufgabe $\alpha = \pi$ (die Dipole oszillieren gegeneinander). Weiterhin sei der Abstand d ab sofort und für den Rest der Aufgabe viel kleiner als die Wellenlänge λ, so dass gilt $\sin\left[k \frac{d}{2} \sin\theta \cos\phi\right] \approx k \frac{d}{2} \sin\theta\cos\phi$.

(i) (4 Punkte) Berechnen Sie die richtungsabhängige Intensität $I(r,\theta,\phi)$ des Antennenpaars. *Hinweis:* Erleichtern Sie sich Ihre Arbeit, indem Sie die Transversalität der Fernfelder ausnutzen.

In kartesischen Koordinaten und Vektorkomponenten lautet das Fernfeld des Dipolpaares

$$\mathbf{E}_\infty = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}_\infty = \mathrm{i}kd\, \frac{k^2}{\varepsilon_0}\, \mathrm{p}\, \frac{\exp[\mathrm{i}kr]}{4\pi r^4} \begin{bmatrix} x^2 z \\ xyz \\ -x(x^2+y^2) \end{bmatrix} . \tag{8}$$

Wir interessieren uns im Folgenden für die Propagation des Feldes entlang der x-Richtung und somit für das Feldwinkelspektrum $\hat{\mathbf{E}}(k_y, k_z; x)$.

(j) (5 Punkte) Anhand von $\mathbf{E}_\infty$ bestimmen Sie das räumliche Fourierspektrum $\hat{\mathbf{E}}(k_y, k_z, x = 0)$ in der Ebene $x = 0$.

(k) (2 Punkte) Entspricht das in Teilaufgabe (j) berechnete Spektrum $\hat{\mathbf{E}}(k_y,\, k_z; x = 0)$ dem tatsächlichen Spektrum des Antennenpaares in der Quellebene $x = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Es ist keine Rechnung erforderlich.