Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10)

23. August 2016, 09:00-12:00 Uhr, HIL F15

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte beachten Sie:

- Diese Prüfung besteht aus 3 Aufgaben. Die Angabe umfasst 3 beidseitig bedruckte Blätter exklusive dieses Deckblatts. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **10 beidseitig beschriebene A4-Blätter**.
  Bücher, Vorlesungsmaterialien und elektronische Geräte sind nicht erlaubt.
- Geben Sie dieses Deckblatt für Ihre Lösungen mit ab. **Unterschreiben** Sie dieses Deckblatt.
- Lösungen sind zu begründen und Zwischenrechnungen nachvollziehbar anzugeben. Nicht eindeutig lesbare Passagen bleiben unbewertet!
- Benutzen Sie einen dokumentenechten schwarzen oder blauen Stift (kein Rotstift, kein radierbarer Stift). Verwenden Sie keine Korrekturhilfen (z.B. Tipp-Ex oder Tintenlöscher).
  Mit Korrekturhilfen oder radierbarem Stift bearbeitete Passagen bleiben unbewertet!
- Schreiben Sie **nicht direkt auf die Angabe oder das Deckblatt**. Lösungen auf Angabenblättern bleiben unbewertet!
- Versehen Sie **jedes Blatt mit Ihrem Namen**.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige Hinweise von allgemeinem Interesse werden während der Prüfung laut mitgeteilt.

Viel Erfolg!

Unterschrift Student/-in: ______________________________

Aufgabe	Punkte	Visum Korrektor
1	**/25**	
2	**/40**	
3	**/35**	
Total:	**/100**	

1 Polarisierung eines dünnen Films (25 Punkte)

Wir betrachten einen dünnen Film, der von einem elektromagnetischen Puls angeregt werde. Der Film befinde sich in der Ebene $z = 0$ und sei so dünn, dass es ausreicht, das Feld dort zu betrachten. Das Material des Films sei approximativ durch die lineare elektrische Suszeptibilität

$$\chi(\omega) \;=\; \chi_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega/\Omega_0} \tag{1}$$

mit den Materialkonstanten χ_0 und Ω_0 beschrieben. Das anregende elektrische Feld habe den Zeitverlauf

$$\mathbf{E}(z = 0, t) \;=\; \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{-t^2/t_0^2}\,, \tag{2}$$

wobei t_0 die Pulsdauer und $\mathbf{E}_0$ die Pulsamplitude bezeichnen. Wir interessieren uns für die zeitliche Abhängigkeit der Polarisierung $\mathbf{P}(t)$ des Films.

(a) (5 Punkte) Beschreiben Sie in einigen kurzen Sätzen und unter Verwendung von Formeln (ohne diese auszuwerten) zwei mögliche Vorgehensweisen, um im allgemeinen Fall $\mathbf{P}(t)$ aus $\mathbf{E}(z = 0, t)$ und $\chi(\omega)$ zu berechnen.

(b) (6 Punkte) Berechnen Sie das Frequenzspektrum $\hat{\mathbf{E}}(z = 0, \omega)$ des anregenden elektrischen Feldes aus Gl. (2).
Hinweis: Quadratisches Ergänzen sowie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u\; \mathrm{e}^{-au^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ sollten hilfreich sein.

(c) (6 Punkte) Berechnen Sie nun $\mathbf{P}(t)$ für das anregende Feld aus Gl. (2) und die Suszeptibilität aus Gl. (1), und bestimmen Sie die zeitliche Verzögerung zwischen der Polarisierung und dem elektrischen Feld.
Hinweis: Beachten Sie den Hinweis aus Teilaufgabe (b).

(d) (8 Punkte) Sie haben soeben festgestellt, dass die Suszeptibilität aus Gl. (1) zu einer zeitlichen Verzögerung der Polarisierung relativ zum anregenden Feld führt. Es lässt sich zeigen, dass die Suszeptibilität

$$\chi(\omega) \;=\; \chi_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega/\Omega_0}\,\mathrm{e}^{-\omega^2\tau^2/4} \tag{3}$$

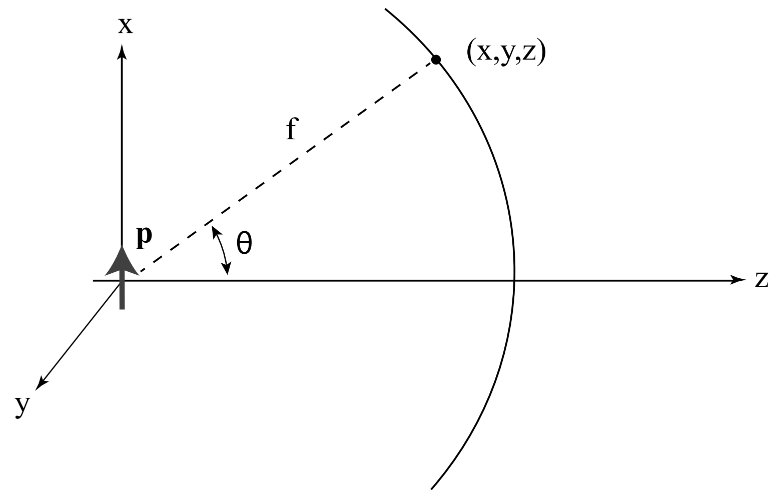
mit der materialspezifischen Konstante τ zur Polarisierung

$$\mathbf{P}(t) = \chi_0\,\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{-(t-1/\Omega_0)^2/(t_0+\tau)^2} \tag{4}$$

führt.
Welchen Einfluss hat der Parameter τ auf den Polarisierungspuls?
Erstellen Sie einen Graphen der zeitabhängigen Polarisierung für den Fall $\tau = t_0 = 1/(2\Omega_0)$.
Tragen Sie auf der Abszisse die normierte Zeit $t\Omega_0$ auf und auf der Ordinate die normierte Polarisierung $|\mathbf{P}|/(|\chi_0\mathbf{E}_0|)$. Beschriften Sie Ihre Achsen.
Skizzieren Sie zusätzlich den Puls im Fall $\tau = 0$, $t_0 = 1/(2\Omega_0)$.
Beschriften Sie quantitativ die normierte Polarisierung zum Zeitpunkt $t = 0$ für beide Pulse.
Beschriften Sie quantitativ den Zeitpunkt beider Pulsmaxima.

2 **Reflexion eines Dipolfeldes** (40 Punkte)

Das Feld einer bei Kreisfrequenz ω oszillierenden Dipolantenne mit komplexem Dipolmoment $\mathbf{p} = p\mathbf{n}_x$, gelegen am Ursprung $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$, treffe im Vakuum auf eine ideal leitende sphärische Oberfläche auf. Der Radius f der sphärischen Oberflache sei viel grösser als die Wellenlänge λ der emittierten Strahlung, sodass im Folgenden stets nur das Fernfeld zu berücksichtigen ist.



(a) (6 Punkte) Bestimmen Sie das von der Dipolantenne ausgesandte komplexe Fernfeld $\mathbf{E}_\infty(x, y, z)$ auf einer Kugel mit Radius $R = f$ um den Ursprung.

(b) (5 Punkte) Auf der leitenden Kugeloberfläche wird das vom Dipol ausgesandte Feld reflektiert. Welche Randbedingung gilt für das elektrische Feld auf der Kugeloberfläche? Verwenden Sie diese Randbedingung, um das komplexe reflektierte Feld $\mathbf{E}_\infty^{\mathrm{ref}}(\mathbf{r})$ in einem beliebigen Punkt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ auf der Kugeloberfläche zu formulieren.

(c) (6 Punkte) Anhand des reflektierten Feldes auf der Kugeloberfläche $\mathbf{E}_\infty^{\mathrm{ref}}(x, y, z)$, berechnen Sie die räumliche Fouriertransformation $\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z = 0)$ des reflektierten Feldes in der Ebene $z = 0$.
Hinweis: Verwenden Sie einen Ihnen bekannten Zusammenhang zwischen dem Feldwinkelspektrum in einer bestimmten Ebene und dem Fernfeld im Realraum.

(d) (3 Punkte) Der kugelförmige Spiegel sei endlich gross, rotationssymmetrisch um die z-Achse und durch den maximalen Öffnungswinkel $\theta = \theta_{\max}$ begrenzt. Bestimmen Sie den Wertebereich von k_x und k_y im räumlichen Spektrum $\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{ref}}(k_x, k_y;\, 0)$.

(e) (5 Punkte) Geben Sie einen Ausdruck an, der die Berechnung des komplexen reflektierten Feldes $\mathbf{E}^{\mathrm{ref}}(x, y, z)$ in einem beliebigen Raumpunkt aus dem Feldwinkelspektrum $\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{ref}}(k_x, k_y;\, 0)$ erlaubt. Berücksichtigen Sie dabei den maximalen Öffnungswinkel $\theta_{\max}$ des Spiegels.
Hinweis: Die Auswertung eventuell auftretender Integrale in Ihrem Ausdruck ist nicht erforderlich.

(f) (4 Punkte) Der maximale Öffnungswinkel $\theta_{\max}$ sei klein. Beschreiben Sie (in Worten), welche Näherung Sie bemühen würden, um eine analytische Lösung für das reflektierte Feld

$\mathbf{E}^{\mathrm{ref}}(x,y,z)$ zu finden. Geben Sie quantitative Näherungen an für k_x, k_y und k_z, jeweils zur Berechnung von Amplitude und Phase.

(g) (6 Punkte) Unter der Annahme, dass $\theta_{\max}$ klein ist, findet man für das komplexe reflektierte Feld am Ursprung

$$\mathbf{E}^{\mathrm{ref}}(0,0,0) \;=\; \frac{\mathrm{i}\,\mathbf{p}\,k^3}{8\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kf}\,\theta_{\max}^2 \quad .$$

Geben Sie zunächst ohne Rechnung die vom Dipol im Zeitmittel abgestrahlte Leistung $\bar{P}_0$ in Abwesenheit des Spiegels an. Berechnen Sie dann die zeitgemittelte abgestrahlte Leistung $\bar{P}$ des Dipols in Anwesenheit des Spiegels als Funktion des Spiegelradius f.

(h) (5 Punkte) Der Dipol sei nun vom Ursprung versetzt, sodass gilt $\mathbf{r}_0 \neq (0,0,0)$. Beschreiben Sie in einigen kurzen Sätzen die essientiellen Schritte der Fraunhofer-Näherung, insbesondere bezüglich Amplitude und Phase des genäherten Feldes. Verwenden Sie die Fraunhofer-Näherung, um das Fernfeld $\mathbf{E}_{\infty}(x,y,z)$ des versetzten Dipols auf einer Kugel mit Radius f um den Usprung zu berechnen.

3 **Reflexion im Wellenleiter** (35 Punkte)

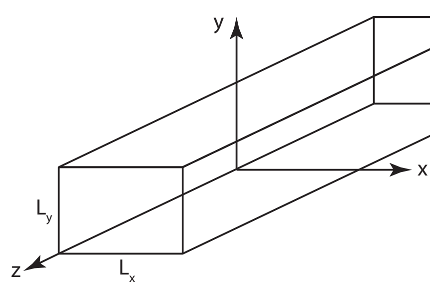
Wir betrachten die TM_{11}-Mode eines in z-Richtung unendlich ausgedehnten Wellenleiters mit perfekt reflektierenden Wänden und rechteckigem Querschnitt, der mit einem Medium mit Wellenimpedanz Z gefüllt sei. Die Abmessungen des Wellenleiters seien L_x in x-Richtung und L_y in y-Richtung.
Hinweis: In dieser Aufgabe sollten folgende, Ihnen aus der Vorlesung bekannten Relationen, hilfreich sein (es gilt $k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$)

$$E_x^{xy} = Z\frac{\mathrm{i}k}{k_t^2}\frac{\partial H_z^{xy}}{\partial y} + \frac{\mathrm{i}k_z}{k_t^2}\frac{\partial E_z^{xy}}{\partial x}, \tag{5}$$

$$E_y^{xy} = -Z\frac{\mathrm{i}k}{k_t^2}\frac{\partial H_z^{xy}}{\partial x} + \frac{\mathrm{i}k_z}{k_t^2}\frac{\partial E_z^{xy}}{\partial y}, \tag{6}$$

$$H_x^{xy} = -\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{i}k}{k_t^2}\frac{\partial E_z^{xy}}{\partial y} + \frac{\mathrm{i}k_z}{k_t^2}\frac{\partial H_z^{xy}}{\partial x}, \tag{7}$$

$$H_y^{xy} = \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{i}k}{k_t^2}\frac{\partial E_z^{xy}}{\partial x} + \frac{\mathrm{i}k_z}{k_t^2}\frac{\partial H_z^{xy}}{\partial y}. \tag{8}$$



(a) (3 Punkte) Wie lauten die Komponenten des Wellenvektors $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ der TM_{11}-Mode bei Kreisfrequenz ω?

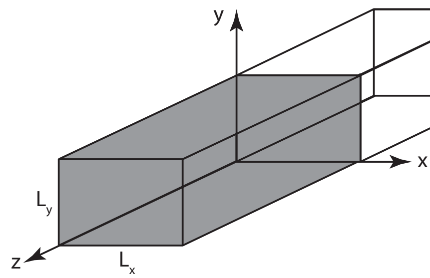
(b) (2 Punkte) Wie lautet die z-Komponente $E_z(x, y, z = 0)$ des komplexen elektrischen Feldes in der Ebene $z = 0$?

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(x, y, z)$ und das komplexe Magnetfeld $\mathbf{H}(x, y, z)$ im Wellenleiter.

(d) (5 Punkte) Berechnen Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor $\langle\mathbf{S}\rangle$ im Wellenleiter. In welche Richtung zeigt er? Ergibt Ihr Resultat Sinn?

(e) (4 Punkte) Berechnen Sie die durch den Wellenleiter transportierte Leistung.
Hinweis: Die Integrale $\int_0^\pi \mathrm{d}u \sin^2 u = \int_0^\pi \mathrm{d}u \cos^2 u = \pi/2$ sollten hilfreich sein. Ihr Ausdruck für die Leistung sollte die Grössen $E_{0z}, k_z, k, k_t, L_x, L_y$ und numerische Konstanten enthalten.

Ab sofort sei der Wellenleiter im Halbraum $z < 0$ mit einem Medium 1 mit Brechungsindex n_1 gefüllt, im Halbraum $z > 0$ mit einem Medium 2 mit Brechungsindex n_2. Es propagiere eine TM_{11}-Mode mit Kreisfrequenz ω in positive z-Richtung auf die Grenzfläche zu. Im Folgenden bestimmen wir den komplexen Reflexionskoeffizienten für die Mode. Wir schreiben das totale Feld in unserem Problem als ein einfallendes Feld $\mathbf{E}_{\mathrm{in}}$, ein reflektiertes Feld $\mathbf{E}_{\mathrm{ref}}$ und ein transmittiertes Feld $\mathbf{E}_{\mathrm{trans}}$.



(f) (2 Punkte) Welches Verhältnis gilt zwischen den transversalen Wellenzahlen des einfallenden Feldes k_x^{in}, k_y^{in} und jenen des reflektierten Feldes k_x^{ref}, k_y^{ref} bzw. des transmittierten Feldes k_x^{trans}, k_y^{trans}?

(g) (2 Punkte) Drücken Sie den Betrag des Wellenvektors im Medium i durch die Frequenz ω, die Lichtgeschwindigkeit c und den Brechungsindx n_i aus. Formulieren Sie die Wellenimpedanzen Z_i sowie die Brechungsindizes n_i durch die Materialparameter ϵ_i und μ_i im Medium i.

(h) (6 Punkte) Die komplexe Amplitude des einfallendes Feldes sei E_0^{in}. Wir schreiben die Amplitude des reflektierten Feldes als $E_0^{\mathrm{ref}} = r_{TM} E_0^{\mathrm{in}}$ und jene des transmittierten Feldes als $E_0^{\mathrm{trans}} = t_{TM} E_0^{\mathrm{in}}$, mit dem komplexen Reflexionskoeffizienten r_{TM} und dem komplexen Transmissionskoeffizienten t_{TM}. Verwenden Sie die Stetigkeitsbedingungen für das $\mathbf{E}$-Feld und jene für das $\mathbf{H}$-Feld, um den Reflexionskoeffizienten r_{TM} in Abhängigkeit von $k_{z1}, k_{z2}, \epsilon_1, \epsilon_2, \mu_1, \mu_2$ zu bestimmen.

(i) (3 Punkte) Sie sollten in der vorhergehenden Teilaufgaben für den Reflexionskoeffizienten r_{TM} der betrachteten TM-Mode gerade den Fresnelkoeffizienten r^p gefunden haben. Erklären Sie dieses Resultat intuitiv in wenigen Sätzen.

(j) (4 Punkte) Ist es möglich, dass eine einfallende Welle im Medium 1 propagierend ist, jedoch im Medium 2 evaneszent? Welche Bedingung müsste hierzu für n_2 gelten (in Abhängigkeit von L_x, L_y und $k_0 = \omega/c$)? Welcher Anteil der einfallenden Intensität würde dann an der Grenzfläche im Wellenleiter reflektiert werden?

Seite leer