Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10)

9. Februar 2016, 14-17 Uhr, ETF C1

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte beachten Sie:

- Diese Prüfung besteht aus 3 Aufgaben und hat 3 beidseitig bedruckte Seiten exklusive dieses Deckblatts. Sie haben 3 Stunden Zeit, um die Aufgaben zu lösen.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **10 beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Keine Bücher, Vorlesungsmaterialien, Taschenrechner, Handys, oder Computer!
- Geben Sie dieses Blatt als Deckblatt für Ihre Lösungen ab.
- Die Zwischenrechnungen müssen angegeben werden und die Lösungen sind zu begründen.
- Benutzen Sie bitte kein rotes Schreibzeug (Korrekturfarbe).
- Schreiben Sie **nicht auf die Aufgabenblätter** (wird nicht korrigiert).
- Vergessen Sie nicht, **jedes Blatt mit Ihrem Namen** zu versehen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige weitere Hinweise von allgemeinem Interesse (Korrekturen von Schreibfehlern, etc.) werden während der Prüfung an die Wandtafel geschrieben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	Punkte	Visum
1		
2		
3		
Total:		

1 Feld einer Strahlungsquelle (35 Punkte)

In der Ebene $z = 0$ in einem homogenen Medium mit Materialparametern ε, μ laute das räumliche Fourierspektrum $\hat{\mathbf{E}}$ einer monochromatischen Strahlungsquelle

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z = 0) = \frac{\hat{E}_0}{k k_z} \begin{bmatrix} k^2 - k_x^2 \\ -k_x k_y \\ -k_x k_z \end{bmatrix}, \tag{1}$$

wobei für die Wellenzahl $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ gelte, und $\hat{E}_0$ eine konstante Amplitude sei.

(a) (1 Punkt) Bestimmen Sie das Fourierspektrum $\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z)$ in einem beliebigen Punkt des Halbraumes $z > 0$.

(b) (2 Punkte) Geben Sie einen Ausdruck an für das Feld $\mathbf{E}(x, y, z)$ in einem beliebigen Raumpunkt $z > 0$.
Hinweis: Die Auswertung Ihres Ausdruckes ist nicht erforderlich!

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie das Fernfeld $\mathbf{E}_\infty(x, y, z)$ in einem beliebigen Raumpunkt $z \to \infty$.

(d) (1 Punkt) Formulieren Sie die Green'sche Funktion für das Fernfeld am Ort $\mathbf{r}$ eines zeitharmonischen Dipols bei Frequenz ω gelegen am Ort $\mathbf{r}'$ unter Verwendung von $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

(e) (5 Punkte) Zeigen Sie mithilfe der soeben in Teilaufgabe (d) formulierten Green'schen Funktion, dass es sich bei dem in Teilaufgabe (c) gefundenen Feld um das Fernfeld eines strahlenden Dipols handelt. Geben Sie die Position des Dipols an, sowie sein Dipolmoment $\mathbf{p}$ unter Verwendung von $\hat{E}_0$, der Wellenzahl k, der Dielektrizitätskonstante ε sowie numerischer Konstanten.

(f) (2 Punkte) Wie lautet die Intensität $I(r, \phi, \theta)$ im Fernfeld eines im Ursprung gelegenen Dipols mit Dipolmoment $\mathbf{p} = p\mathbf{n}_x$ im Vakuum? Verwenden Sie Polarkoordinaten (r, ϕ, θ), wobei der Polarwinkel θ wie üblich zur z-Achse und der Azimuthalwinkel ϕ zur x-Achse gemessen werde.

(g) (6 Punkte) Erstellen Sie jeweils einen Graphen in Polardarstellung der durch ihren Maximalwert normierten Intensität $I/I_{\max}$ des Dipols aus Teilaufgabe (f), einmal als Funktion des Azimuthalwinkels für den Fall $I(\phi, \theta = \pi/2)$, sowie einmal als Funktion des Polarwinkels für den Fall $I(\phi = \pi/2, \theta)$. Beschriften Sie Ihre Graphen aussagekräftig.

(h) (3 Punkte) Wir betrachten nun den zeitharmonischen Dipol $\mathbf{p} = p_x\mathbf{n}_x$ im Vakuum, der um die Distanz d vom Ursprung in y-Richtung verschoben ist und sich somit am Ort $r' = (0, d, 0)$ befindet. Formulieren Sie das Fernfeld $\mathbf{E}'_\infty(x, y, z)$ dieses Dipols.

(i) (6 Punkte) Beschreiben Sie die beiden essentiellen Schritte der Fraunhofer-Näherung und wenden Sie diese auf das Fernfeld des Dipols gelegen am Ort $r' = (0, d, 0)$ an. Zeigen Sie, dass sich das genäherte Fernfeld des verschobenen Dipols $\mathbf{E}'_\infty$ aus Teilaufgabe (h) lediglich um einen Phasenfaktor δ vom Fernfeld des Dipols gelegen am Ursprung $\mathbf{E}_\infty$ unterscheidet. Drücken Sie den Phasenfaktor durch die Wellenzahl k, die Verschiebung d, den Azimuthalwinkel ϕ, sowie den Polarwinkel θ aus.

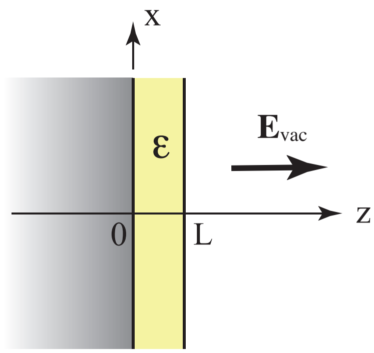
(j) (2 Punkte) Formulieren Sie nun das totale Fernfeld in der Fraunhofer-Näherung zweier Dipole mit identischem Dipolmoment $\mathbf{p} = p_x \mathbf{n}_x$ gelegen an den Orten $r' = (0, d, 0)$ beziehungsweise $r'' = (0, -d, 0)$ im Vakuum, und drücken Sie es aus durch das Fernfeld eines im Ursprung gelegenen Dipols $\mathbf{E}_\infty$ und sowie den Phasenfaktor δ aus Teilaufgabe (i).

(k) (3 Punkte) Berechnen Sie die Intensität $I(r, \phi, \theta)$ im Fernfeld der beiden Dipole aus der vorherigen Teilaufgabe (j) und formulieren Sie diese unter Verwendung der abgestrahlten Leistung eines einzelnen Dipols im Vakuum P_0.

(l) (2 Punkte) Welchen (Wert in Einheiten der abgestrahlten Leistung eines einzelnen Dipols in Vakuum P_0) erwarten Sie für die abgestrahlte Leistung der beiden Dipole im Fall $d = 0$? Erwarten Sie, dass die abgestrahlte Leistung von d abhängt? Begründen Sie Ihre Antworten.

2 Relaxation eines dielektrischen Films (35 Punkte)

Wir betrachten einen dielektrischen Film mit Permittivität ε und Suszeptibilität $\mu = 1$ im Raumbereich $0 < z < L$, der auf ein ideal reflektierendes Material im Raumbereich $z < 0$ aufgetragen sei und auf der anderen Seite ($z > L$) von Vakuum begrenzt werde, wie in folgender Abbildung skizziert.



Eine senkrecht einfallende x-polarisierte ebene Welle polarisiere den dielektrischen Film. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde die einfallende Welle abgestellt und wir betrachten im Folgenden das Ausklingen der gespeicherten Energie. Dazu suchen wir in dieser Aufgabe die charakteristischen Eigenlösungen des Systems in Abwesenheit eines treibenden Feldes. Die gespeicherte Energie werde in z-Richtung als ebene Welle $\mathbf{E}_{\rm vac}$ abgestrahlt, deren Kreisfrequenz ω und Ausklingzeit τ im Folgenden anhand der Randbedingungen zu bestimmen sind.

(a) (2 Punkte) Schreiben Sie das zeitabhängige abgestrahlte Feld $\mathbf{E}_{\rm vac}(\mathbf{r}, t)$ in komplexer Schreibweise und formulieren Sie das komplexe Feld $\mathbf{E}_{\rm vac}(\mathbf{r})$ mit Amplitude E_0.

(b) (4 Punkte) Formulieren Sie die komplexen elektrischen Felder im Dielektrikum $\mathbf{E}_{\rm diel}(\mathbf{r})$ als Summe zweier gegenläufiger Teilfelder, wobei die linksläufige Welle die Amplitude $E^{(1)}_{\rm diel}$ habe und die rechtsläufige Welle die Amplitude $E^{(2)}_{\rm diel}$. Wie berechnet sich die Wellenzahl im Dielektrikum k_d aus jener im Vakuum k_0?

(c) (5 Punkte) Bestimmen Sie die zugehörigen komplexen magnetischen Felder im Vakuum $\mathbf{H}_{\rm vac}(\mathbf{r})$, sowie im Dielektrikum $\mathbf{H}_{\rm diel}(\mathbf{r})$. Drücken Sie die Magnetfeldamplituden durch die elektrischen Feldamplituden E_0, $E^{(1)}_{\rm diel}$ und $E^{(2)}_{\rm diel}$ sowie die Vakuumimpedanz $Z_{\rm vac}$ bzw. die Wellenimpedanz des Dielektrikums $Z_{\rm diel}$ aus.

(d) (6 Punkte) Wenden Sie die Randbedingungen an den beiden Grenzflächen des Problems auf die Felder $\mathbf{E}_{\rm diel}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{E}_{\rm vac}(\mathbf{r})$, sowie $\mathbf{H}_{\rm diel}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{H}_{\rm vac}(\mathbf{r})$ an.

(e) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass sich anhand der Randbedingungen das folgende homogene Gleichungssystem ergibt

$$\begin{bmatrix} \exp\left[\mathrm{i}k_0 L\right] & 2\mathrm{i}\sin(k_d L) \\ \exp\left[\mathrm{i}k_0 L\right] & 2\sqrt{\varepsilon}\cos(k_d L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{E}_0 \\ \mathrm{E}_{\rm diel} \end{bmatrix} = 0\,, \tag{2}$$

wobei $\mathrm{E}_{\rm diel}$ die Feldamplitude im Dielektrikum ist.

(f) (4 Punkte) Leiten Sie die charakteristische Eigenwertgleichung des Systems her und bestimmen Sie den (komplexen) Eigenwert für $k_d L$.
Hinweis: Verwenden Sie $\arctan[-\mathrm{i}x] = \pi/2 - \mathrm{i}\alpha$, wobei α eine reelle Zahl ist, die von x abhängt und im Folgenden als gegeben betrachtet werden darf.

(g) (4 Punkte) Bestimmen Sie anhand des Eigenwertes für $k_d L$ die komplexe Frequenz $\omega = \omega' - \mathrm{i}\omega''$, deren Imaginärteil das zeitliche Ausklingen der Felder beschreibt. Berechnen Sie die sich aus ω' ergebende Vakuumwellenlänge λ_0 als Funktion von L und ε, sowie die aus ω'' resultierende Ausklingzeit τ als Funktion von L, ε, c und α.

(h) (7 Punkte) Betrachten Sie nun das zeitabhängige Feld $\mathbf{E}_{\text{vac}}$ im Raumbereich $z > 0$. Das relle Feld im Vakuum am Ort $z = 0$ lautet

$$\mathbf{E}(z=0,t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \leq 0, \\ \mathrm{Re}\left\{E_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} \mathbf{n}_y & \text{für} \quad t > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Formulieren Sie das orts- und zeitabhängige elektrische Feld $\mathbf{E}_{\text{vac}}(z,t)$ im Raumbereich $z > 0$ und skizzieren Sie das Feld zum Zeitpunkt $t = \tau$ als Funktion von z/λ, wobei gelte $\tau = 3\lambda/c$.

3 **Absorption in einem metallischen Leiter** (30 Punkte)

Wir verifizieren das Poynting-Theorem für eine ebene Welle, die in einem guten metallischen Leiter in Richtung der z-Achse propagiert. Der Leiter sei charakterisiert durch μ (reell und positiv) und $\varepsilon = \varepsilon' + \mathrm{i}\sigma/(\omega\varepsilon_0)$, mit der Leitfähigkeit σ. Es dominiere der Imaginärteil der Permittivität, so dass gilt $\varepsilon \approx \mathrm{i}\sigma/(\omega\varepsilon_0)$. Die elektrische Feldamplitude bei $z = 0$ laute $\mathbf{E}_0$ und sei reell.
Hinweis: Verwenden Sie im Folgenden den Parameter $\beta = (1/c)\sqrt{\mu\sigma\omega/(2\varepsilon_0)}$, um Ihre Lösungen übersichtlich zu gestalten.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie den $\mathbf{k}$-Vektor der ebenen Welle unter Verwendung des Parameters β.
Hinweis: Es gilt $\sqrt{\mathrm{i}} = (1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$.

(b) (2 Punkte) Formulieren Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(z,t)$.

(c) (6 Punkte) Berechnen Sie das magnetische Feld $\mathbf{H}(z,t)$ und bestimmen Sie die Phasenverschiebung zwischen elektrischem und magnetischem Feld.

(d) (5 Punkte) Bestimmen Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor $\langle \mathbf{S} \rangle$ der betrachteten ebenen Welle.

(e) (2 Punkte) Berechnen Sie den Leistungsfluss $\mathbf{P}_S$ der ebenen Welle durch eine Fläche A, die bei $z = 0$ senkrecht zur z-Achse steht.

Sie haben soeben die Leistung berechnet, die ins Metall eindringt. Im Folgenden bestätigen wir das Poynting'sche Theorem, indem wir jene Leistung berechnen, die das Feld der ebenen Welle an den induzierten Polarisationsströmen verrichtet.

(f) (5 Punkte) Drücken Sie das Polarisationsfeld $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ im metallischen Medium aus durch das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, die Leitfähigkeit σ, die Kreisfrequenz ω, sowie konstante Faktoren.

(g) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Polarisationsstromdichte lautet

$$\mathbf{j}_\mathrm{p}(\mathbf{r},t) = -\mathrm{Re}\{[\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 + \sigma]\,\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}\}\ . \tag{4}$$

(h) (4 Punkte) Berechnen Sie die mittlere Leistung (pro Einheitsfläche A) P_abs, die in Joule'sche Wärme umgesetzt wird. Betrachten Sie hierzu die Leistung, die das Feld der ebenen Welle an der Polarisationsstromdichte vollbringt.
Hinweis: Der Leiter erstrecke sich über den gesamten Halbraum $z > 0$.

(i) (2 Punkte) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse für den Leistungsfluss des Poyntingvektors P_S ins Metall aus Teilaufgabe (e) sowie für die im Metall absorbierte Joule'sche Wärme P_abs aus Teilaufgabe (h). Ergeben Ihre Resultate Sinn? Begründen Sie Ihre Antwort.