Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10)

21. August 2015, 14-17 Uhr, HIL F15

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte beachten Sie:

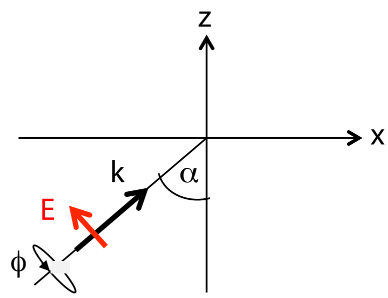
- Diese Prüfung besteht aus 3 Aufgaben und hat 3 beidseitig bedruckte Seiten exklusive dieses Deckblatts. Sie haben 3 Stunden Zeit, um die Aufgaben zu lösen.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **10 beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Keine Bücher, Vorlesungsmaterialien, Taschenrechner, Handys, oder Computer!
- Geben Sie dieses Blatt als Deckblatt für Ihre Lösungen ab.
- Die Zwischenrechnungen müssen angegeben werden und die Lösungen sind zu begründen.
- Benutzen Sie bitte kein rotes Schreibzeug (Korrekturfarbe).
- Schreiben Sie **nicht auf die Aufgabenblätter** (wird nicht korrigiert).
- Vergessen Sie nicht, **jedes Blatt mit Ihrem Namen** zu versehen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige weitere Hinweise von allgemeinem Interesse (Korrekturen von Schreibfehlern, etc.) werden während der Prüfung an die Wandtafel geschrieben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	**Punkte**	**Visum**
1		
2		
3		
Total:		

1 Überlagerung ebener Wellen (30 Punkte)

Wir betrachten eine linear polarisierte ebene Welle mit Kreisfrequenz ω und Amplitude $E_0 \in \mathbb{R}$ in Vakuum, die unter dem Winkel α zur z-Achse propagiert. Der Wellenvektor $\mathbf{k}$ liege in der (x,z)-Ebene. Der elektrische Feldvektor schliesse den Winkel ϕ mit der (x,z)-Ebene ein, wie in der folgenden Abbildung skizziert. Es gelte zunächst $\phi = 0$.



(a) (1 Punkt) Drücken Sie den Wellenvektor $\mathbf{k}$ in kartesischen Komponenten durch die Kreisfrequenz ω, die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c, sowie den Einfallswinkel α aus.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie für die betrachtete ebene Welle

- das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$,
- das reelle zeitabhängige elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ unter Verwendung trigonometrischer Funktionen,
- sowie die Divergenz des reellen elektrischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$.

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $E_z(\mathbf{r},t)$ die homogene Wellengleichung in Vakuum erfüllt.

(d) (3 Punkte) Verwenden Sie eine Maxwell-Gleichung, um aus dem komplexen elektrischen Feld das komplexe magnetische Feld $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ der betrachteten Welle zu berechnen. Drücken Sie dessen Amplitude durch E_0, ε_0 und μ_0 aus.

(e) (3 Punkte) Leiten Sie aus der Definition des Poyntingvektors $\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ einen Ihnen bekannten Ausdruck für den zeitgemittelten Poyntingvektor $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle$ für ein beliebiges monochromatisches Feld, definiert durch die komplexen Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, her.

(f) (2 Punkte) Berechnen Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle$ der in dieser Aufgabe betrachteten ebene Welle unter Verwendung der in Aufgabenteilen (b) und (d) bestimmten komplexen elektrischen und magnetischen Felder.

(g) (5 Punkte) Gehen Sie (nur für diese Teilaufgabe) davon aus, dass die betrachtete ebene Welle senkrecht auf ein perfekt leitendes Material auftrifft. Verwenden Sie eine Ihnen bekannte Formel, die den Strahlungsdruck durch die Intensität ausdrückt, um den Strahlungsdruck $p_\perp$ zu berechnen, den die Welle auf den perfekten Leiter ausübt. Formulieren Sie Ihr Ergebnis für $p_\perp$ unter ausschliesslicher Verwendung der Konstanten ε_0 sowie E_0 und verifizieren Sie die Einheiten im SI-System.

Wir betrachten nun zwei in der (x, z)-Ebene propagierende, s-polarisierte monochromatische ebene Wellen ($\phi = \pi/2$) mit gleichen Amplituden $E_0 \in \mathbb{R}$ und Frequenzen ω. Eine der Wellen propagiere mit Wellenvektor $\mathbf{k}_1$ unter dem Winkel α relativ zur z-Achse, die zweite mit Wellenvektor $\mathbf{k}_2$ unter dem Winkel $-\alpha$.

(h) (1 Punkte) Formulieren Sie das gesamte komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sowie die Wellenvektoren $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}_2$ in kartesischen Koordinaten unter Verwendung von ω, c und α.

(i) (2 Punkte) Formulieren Sie das gesamte komplexe magnetische Feld $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ der beiden Wellen. Drücken Sie dessen Amplitude durch ε_0, μ_0 und E_0 aus.

(j) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der zeitgemittelte Poyntingvektor des Gesamtfeldes unter der Annahme, dass die beiden ebenen Wellen kohärent sind, lautet

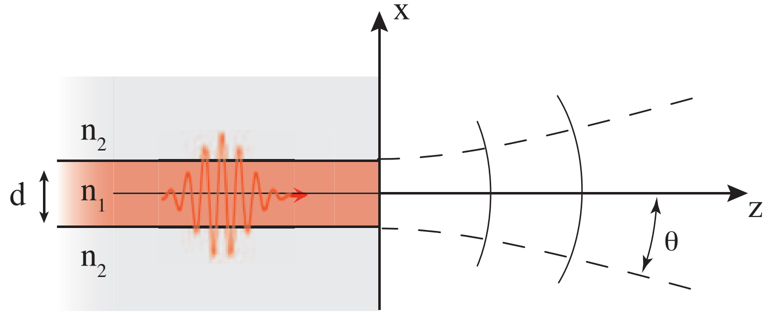
$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = 4 I_0 \cos(\alpha)\, \cos^2[k_x x]\, \mathbf{n}_z. \tag{1}$$

Drücken Sie die Intensität einer einzelnen ebenen Welle I_0 durch die Konstanten ε_0, c und E_0 aus, sowie die x-Komponente der Wellenzahl k_x durch ω, c und α.
Hinweis: Die Relation $1 + \cos(2u) = 2\cos^2(u)$ kann hilfreich sein.

(k) (4 Punkte) Berechnen Sie die Leistung $P_\perp$, die durch eine quadratische Fläche A senkrecht zur z-Achse hindurchtritt. Die Fläche A sei zentriert auf der z-Achse und habe die Seitenlänge $L = \lambda/(2\,\sin\alpha)$, wobei λ die Wellenlänge bei Frequenz ω sei. Formulieren Sie Ihr Ergebnis unter Verwendung von E_0, c, ε_0, α, sowie A.

2 Numerische Apertur eines Wellenleiters (30 Punkte)

Licht, das aus dem Ende eines Wellenleiters austritt, divergiert. Der Divergenzwinkel θ (gemessen zur optischen Achse z) der Lichtintensität wird durch die numerische Apertur $\mathrm{NA} = \sin\theta$ spezifiziert. Wir betrachten hier einen planaren dielektrischen Wellenleiter im Raumbereich $z < 0$. Das Feld wird geführt in einer Schicht mit Brechungsindex n_1 im Raumvolumen $-d/2 < x < d/2$, die von einem Medium mit Brechungsindex $n_2 < n_1$ umgeben ist. Der Raumbereich $z > 0$ sei von Vakuum gefüllt, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.



Wir betrachten zunächst den in z-Richtung unendlich ausgedehnten Wellenleiter.

(a) (3 Punkte) Die Propagationskonstante der fundamentalen TE_1 Wellenleitermode bei Kreisfrequenz ω sei $k_z = n_{\text{eff}}\, k_0$, wobei $k_0 = \omega/c$ (mit c der Vakuumlichtgeschwindigkeit) und $n_{\text{eff}} \in \mathbb{R}$. Definieren Sie den zulässigen Wertebereich von n_{eff} und begründen Sie Ihr Ergebnis.

(b) (7 Punkte) Bestimmen Sie die komplexe elektrische Feldverteilung $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ der fundamentalen TE_1 Mode des unendlich ausgedehnten Wellenleiters mit Propagationskonstante $k_z = n_{\text{eff}}\, k_0$ in den Raumbereichen $x \leq -d/2$, $-d/2 < x < d/2$ und $x \geq d/2$. Drücken Sie sämtliche Propagationskonstanten durch k_0, n_{eff}, n_1 und n_2 aus. Die Feldamplitude bei $x = 0$ sei E_0.
Hinweis: Beachten Sie, welche Randbedingungen das elektrische Feld an den Grenzflächen erfüllen muss.

Wir betrachten nun den in der Ebene $z = 0$ abgeschnittenen Wellenleiter, wie in obiger Abbildung skizziert.

(c) (7 Punkte) In guter Näherung kann man annehmen, dass das Feld in der Austrittsebene dem Feld der Wellenleitermode entspricht. Diese kann durch folgende Gauss'sche Funktion approximiert werden

$$\mathbf{E}(x, y, z = 0) = E_0 \exp\left[-(k_{x_1}^2 + \gamma_2^2)\, x^2/2\right] \mathbf{n}_\mathrm{y} \ , \tag{2}$$

mit $k_{x_1} = k_0\sqrt{n_1^2 - n_{\text{eff}}^2}$ und $\gamma_2 = k_0\sqrt{n_{\text{eff}}^2 - n_2^2}$. Berechnen Sie das Fernfeld $\mathbf{E}_\infty(x, y, z)$ des ausgekoppelten Lichts unter Verwendung der Parameter $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, k_0, E_0, k_{x_1} und γ_2.
Hinweis: Die Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left[-ax^2 - \mathrm{i}bx\right] = \sqrt{\pi/a}\exp\left[-b^2/(4a)\right]$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left[-\mathrm{i}bx\right] = 2\pi\,\delta(b)$ können hilfreich sein.

(d) (4 Punkte) Berechnen Sie die normierte Intensitätsverteilung $I(x, y=0)/I_{\max}$ (normiert durch die Maximalintensität) im Fernfeld auf einem Schirm in grossem Abstand D vom Ende des Wellenleiters. Skizzieren Sie die normierte Intensitätsverteilung auf dem Schirm entlang der x-Achse. Beschriften Sie Ihre Achsen sinnvoll und geben Sie (unter Verwendung von D, n_1 und n_2) den Abstand von der optischen Achse an, bei dem die Intensität auf $1/e$ ihres Maximalwertes abgefallen ist.
Hinweis: Behandeln Sie in Ihrem Ausdruck für $I_{\max}$ eventuell auftretende Dirac-Funktionen symbolisch.

(e) (2 Punkte) Bestimmen Sie die numerische Apertur des Wellenleiters als Funktion von n_1 und n_2.

Wir kehren zurück zum in z-Richtung unendlich ausgedehnten Wellenleiter aus dem ersten Teil der Aufgabe. Es werden nun zwei Felder mit gleicher Amplitude aber mit leicht verschiedenen Frequenzen $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ und $\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$ in den Wellenleiter eingekoppelt. Dies resultiert in der Feldverteilung

$$\mathbf{E}(x=0, z, t) \;\; = \;\; \frac{E_0}{2}\left\{\sin[k_z(\omega_1)z - \omega_1 t] \, + \, \sin[k_z(\omega_2)z - \omega_2 t]\right\} \; \mathbf{n}_y. \tag{3}$$

Die Überlagerung der Teilfelder resultiert in einer Schwebung. Die Dispersion $k_z(\omega) = k_0\, n_{\text{eff}}(\omega)$ hat zur Folge, dass sich die Trägerwelle und ihre Einhüllende mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreiten. Wir entwickeln n_{eff} in eine Taylor Reihe um die Trägerfrequenz ω_0 und erhalten

$$n_{\text{eff}}(\omega) \;\approx\; n_0 \,+\, (\omega - \omega_0)\dot{n}_{\omega_0}, \tag{4}$$

wobei $\dot{n}_{\omega_0} = \partial n_{\text{eff}}/\partial\omega$ evaluiert bei $\omega = \omega_0$ ist.

(f) (4 Punkte) Schreiben Sie $\mathbf{E}(x=0, z, t)$ als Trägerwelle mit Frequenz ω_0 und einer Einhüllenden.
Hinweis: Es gilt $\sin[x] + \sin[y] = 2\cos[(x-y)/2]\,\sin[(x+y)/2]$.

(g) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit v_p und die Gruppengeschwindigkeit v_g des Feldes $E_y(z, t)$. Welche Bedingung muss gelten, damit sich die Einhüllende in negative z-Richtung ausbreitet?
Hinweis: Die Phasengeschwindigkeit v_p entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Trägerwelle und die Gruppengeschwindigkeit v_g der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Einhüllenden.

3 **Strahlung einer linearen Antenne** (40 Punkte)

Wir betrachten eine kurze zylindrische, entlang der z-Achse ausgerichtete Antenne der Länge L in Vakuum, die im Zentrum mit einem zeitharmonischen Strom mit Kreisfrequenz ω getrieben werde. Die Antenne sei aus perfekt leitendem Material, habe die Querschnittsfläche $\mathrm{d}A$ und ihr Durchmesser sei klein gegenüber jeglicher hier betrachteter Wellenlänge. Die komplexe Amplitude des Stromes in der Antenne laute (mit $I_0 \in \mathbb{R}$)

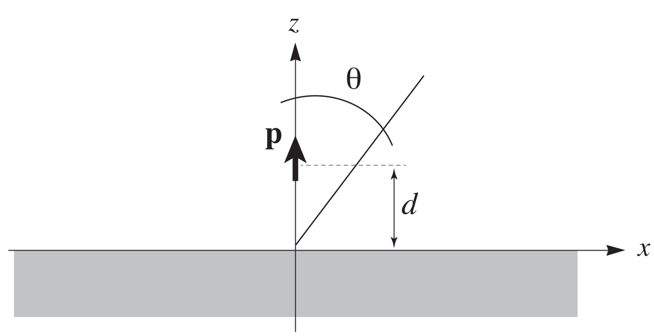
$$I(z) \;=\; \begin{cases} I_0\{1-2z/L\} & 0<z<L/2 \\ I_0\{1+2z/L\} & -L/2<z<0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5}$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie mithilfe der Ladungserhaltung die komplexe Ladungsdichte $\rho(z)$.

(b) (3 Punkte) Da die Antenne kurz gegenüber der Wellenlänge sei ($L \ll \lambda$), beschreiben wir sie im Folgenden durch einen Dipol. Zeigen Sie, dass das komplexe Dipolmoment $\mathbf{p} = \int \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})dV$ für die betrachtete Antenne die z-Komponente $p_z = \mathrm{i}\frac{I_0 L}{2\omega}$ besitzt.

(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die mittlere bei der Frequenz ω abgestrahlte Leistung $\mathrm{P}_{\mathrm{rad}}$ der Antenne und berechnen Sie den Strahlungswiderstand $\mathrm{R}_{\mathrm{rad}}$ als Funktion von L/λ unter Verwendung der Konstanten ε_0 und c, wobei λ die Vakuumwellenlänge bei der Frequenz ω sei. *Hinweis:* Der Strahlungswiderstand ist definiert über die Stromabhängigkeit der abgestrahlten Leistung $\mathrm{P}_{\mathrm{rad}} = (1/2)\,\mathrm{R}_{\mathrm{rad}}\, I_0^2$.

Die durch einen Punktdipol beschriebene Antenne wird nun im Abstand d senkrecht über einem ideal leitenden Material befestigt, das den Raumbereich $z < 0$ füllt, wie in folgender Abbildung skizziert. Das komplexe Dipolmoment des betrachteten Strahlers sei ab sofort mit $\mathbf{p} = p\,\mathbf{n}_z$ bezeichnet. Weiterhin können die an der leitenden Ebene reflektierten Felder durch einen strahlenden Spiegeldipol beschrieben werden, der sich im Abstand d unterhalb der Grenzfläche befindet und ebenfalls das komplexe Dipolmoment $\mathbf{p}$ besitzt.



(d) (5 Punkte) Bestimmen Sie mithilfe der Green'schen Funktion des freien Raumes das komplexe elektrische Fernfeld $\mathbf{E}_\infty(\mathbf{r})$ des am Punkte $\mathbf{r}' = (0,0,d)$ gelegenen Dipols mit Dipolmoment $\mathbf{p}$ in einem beliebigen Punkt $\mathbf{r} = (x,y,z)$, zunächst *in Abwesenheit* der leitenden Ebene. Verwenden Sie kartesische Koordinaten, wie in obiger Abbildung definiert.

(e) (4 Punkte) Beschreiben Sie die essentiellen Schritte der Fraunhofer-Näherung bezüglich Amplitude und Phase des Feldes und wenden Sie diese auf das in der vorhergehenden Aufgabe (d) hergeleitete Fernfeld des Dipols in Abwesenheit der leitenden Ebene an.

(f) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass das elektrische Fernfeld der Antenne über der leitenden Ebene in der Fraunhofer-Näherung lautet

$$\mathbf{E}_\infty(\mathbf{r}) = 2\,\mathbf{E}_\infty^{(d=0)}(\mathbf{r})\ \cos[kd\cos\theta]. \tag{6}$$

Hier ist $\mathbf{E}_\infty^{(d=0)}(\mathbf{r})$ das Fernfeld eines am Koordinatenursprung gelegenen Dipols am Orte $\mathbf{r}$, k die Wellenzahl im Vakuum und θ der Polarwinkel zur z-Achse. Wie lautet das Feld im Bereich $z < 0$?

Hinweis: Das von der Ebene reflektierte Feld kann beschrieben werden als Strahlungsfeld eines nach der Methode der Spiegelladungen induzierten Spiegeldipols an der Position $(0, 0, -d)$.

(g) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Intensität $I(r, \theta)$ im Fernfeld über der perfekt leitenden Platte ($z > 0$) und drücken Sie diese aus durch die Strahlungsleistung eines Dipols im Vakuum P_{rad}, den Abstand vom Ursprung zum Beobachtungspunkt r, den Polarwinkel θ, die Wellenzahl k sowie den Abstand d.

(h) (7 Punkte) Wir betrachten weiterhin den strahlenden Dipol im Abstand d vor der perfekt leitenden Ebene, verlassen jedoch nun die Fraunhofer-Näherung. Die Felder, die an der Oberfläche reflektiert werden, haben eine Rückwirkung auf die Antenne. Berechnen Sie die normierte abgestrahlte Leistung $\mathrm{P}_{\mathrm{rad}}^{\perp}(d)/P_{\mathrm{vac}}$ des Dipols als Funktion von d, wobei P_{vac} die vom Dipol im Vakuum abgestrahlte Leistung ist. Evaluieren Sie $\mathrm{P}_{\mathrm{rad}}^{\perp}(d)/P_{\mathrm{vac}}$ im Grenzfall $d \to 0$.

(i) (4 Punkte) Argumentieren Sie ohne Rechnung unter Zuhilfenahme einer Skizze von Dipol und Spiegeldipol an der Grenzfläche, welchen Grenzwert Sie für $\mathrm{P}_{\mathrm{rad}}^{\perp}(d)/P_{\mathrm{vac}}$ für den in dieser Aufgabe betrachteten, zur Grenzfläche senkrecht orientierten Dipol, im Fall $d \to 0$ erwarten. Wiederholen Sie Ihr Argument für einen Dipol, der parallel zur Grenzfläche orientiert ist. Welchen Wert erwarten Sie für $\mathrm{P}_{\mathrm{rad}}^{\parallel}(d)/P_{\mathrm{vac}}$ im Grenzwert $d \to 0$?