Name **Student**
xx-xxx-xxx, Departement
name@student.ethz.ch
Lfd.Nr.: 1/6

Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10)

4. Februar 2015, 9-12 Uhr, ETF C1

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte Beachten Sie:

- Diese Prüfung besteht aus 4 Aufgaben und hat 2 beidseitig bedruckte Seiten exklusive dieses Deckblatts. Sie haben 3 Stunden Zeit, um die Aufgaben zu lösen.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **10 beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Keine Bücher, Vorlesungsmaterialien, Taschenrechner, Handys, oder Computer!
- Geben Sie dieses Blatt als Deckblatt für Ihre Lösungen ab.
- Die Zwischenrechnungen müssen angegeben werden und die Lösungen sind zu begründen.
- Benutzen Sie bitte kein rotes Schreibzeug (Korrekturfarbe).
- Schreiben Sie **nicht auf die Aufgabenblätter** (wird nicht korrigiert).
- Vergessen Sie nicht, **jedes Blatt mit Ihrem Namen** zu versehen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige weitere Hinweise von allgemeinem Interesse (Korrekturen von Schreibfehlern, etc.) werden während der Prüfung an die Wandtafel geschrieben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	**Punkte**	**Visum**
1		
2		
3		
4		
Total:		

1 Vektor- und Skalarpotentiale (10 Punkte)

Eine Ladungs- und Stromverteilung führt auf die folgenden Potentiale

$$\phi(\mathbf{r},t) \;=\; 0\,, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^t}{r^2}\,\frac{\mathbf{r}}{r}\;,$$

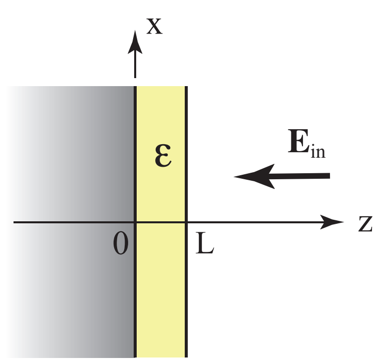
wobei q die Ladung bezeichnet.

1. (7 Punkte) Bestimmen Sie die dazugehörigen Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$.

2. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Divergenz des Vektorpotentials verschwindet und dass die Potentiale der Lorenz-Eichung genügen.

2 Reflexion an einem dielektrischen Film (30 Punkte)

Wir betrachten die elektromagnetischen Felder in einem dielektrischen Film mit Dicke L, Permittivität $\varepsilon > 0$ sowie Permeabilität $\mu = 1$, der auf ein perfekt reflektierendes Material aufgebracht ist, das den gesamten Halbraum $z < 0$ füllt. Im Bereich $z > L$ herrscht ein Vakuum.



Eine senkrecht einfallende ebene Welle

$$\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathrm{E}_0\,\cos(-k_0 z - \omega t)\,\mathbf{n}_x$$

trifft auf den dielektrischen Film auf, wobei $\mathbf{n}_x$ der Einheitsvektor in x Richtung ist, sowie E_0 eine reelle Amplitude.

1. (2 Punkte) Schreiben Sie das einfallende Feld $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r},t)$ in komplexer Schreibweise und definieren Sie die komplexe Amplitude $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r})$.

2. (5 Punkte) Formulieren Sie die komplexen elektrischen Felder im Dielektrikum $\mathbf{E}_{\text{diel}}(\mathbf{r})$ sowie im Vakuum $\mathbf{E}_{\text{vac}}(\mathbf{r})$ jeweils als Summe zweier gegenläufiger Teilfelder. Wie berechnet sich die Wellenzahl im Dielektrikum k_d aus jener im Vakuum k_0?

3. (3 Punkte) Bestimmen Sie die zugehörigen komplexen magnetischen Felder im Vakuum $\mathbf{H}_{\text{vac}}(\mathbf{r})$ sowie im Dielektrikum $\mathbf{H}_{\text{diel}}(\mathbf{r})$ als Funktion der in Teilaufgabe 2 verwendeten elektrischen Teilfelder.

4. (6 Punkte) Formulieren Sie die Randbedingungen an den beiden Grenzflächen, und bestimmen Sie mit ihrer Hilfe das reflektierte Feld $\mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, t)$ im Bereich $z > L$.

5. (5 Punkte) Berechnen Sie die Intensität der reflektierten Welle im Vakuum als Funktion der Filmdicke L. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit der Intensität der einfallenden Welle und diskutieren Sie Ihr Ergebnis unter dem Gesichtspunkt der Energieerhaltung.

6. (6 Punkte) Berechnen Sie die elektrische, die magnetische und die gesamte Energiedichte im Dielektrikum als Funktion vom Ort z und der Feldamplitude im Dielektrikum E_{diel}. Unter Verwendung der Randbedingungen, bestimmen Sie die Feldamplitude E_{diel} als Funktion der einfallenden Amplitude E_0 und der Filmdicke L.

7. (3 Punkte) Bestimmen Sie die Filmdicken L als Funktion der Vakuumwellenlänge λ_0, für welche die Energiedichte im Film maximal wird.

3 Phase eines zeitharmonischen Feldes (10 Punkte)

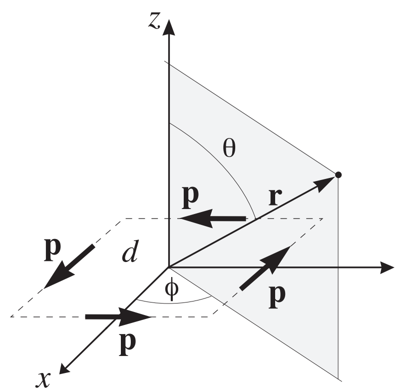
Wir betrachten die x-Komponente eines zeitharmonischen elektrischen Feldes

$$E_x(\mathbf{r}, t) \ = \ \mathrm{Re}\left\{ \left[A(\mathbf{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\mathbf{r})} \right] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \right\} \ ,$$

wobei wir das komplexe elektrische Feld $E_x(\mathbf{r})$ durch eine jeweils reelle Amplitude A und Phase ϕ ausgedrückt haben. Leiten Sie eine Bedingung für $\nabla\phi(\mathbf{r})$ her, die erfüllt sein muss, damit $A(\mathbf{r})$ der Helmholtz-Gleichung genügt.
Hinweis: Setzen Sie E_x in die (quellfreie) Helmholtz-Gleichung ein und betrachten Sie nach Elimination des Phasenterms Real- und Imaginärteile separat.

4 **Strahlung einer Dipolschleife** (25 Punkte)

Wir betrachten eine Antenne, die aus vier zeitharmonischen Dipolen (Kreisfrequenz ω) im freien Raum besteht. Die Dipole sind auf den Seiten einer quadratischen Schleife mit Seitenlänge $2d$ in der xy Ebene und Mittelpunkt im Koordinatenursprung angelegt (siehe Abbildung). Die Phasenbeziehung der Dipole ist wie in der Abbildung dargestellt. Wir sind an den Fernfeldern bei $\mathbf{r}$ interessiert. Der Abstand $r = |\mathbf{r}|$ ist viel grösser als d, was uns erlaubt, die Fraunhofer-Näherung zu gebrauchen.



1. (3 Punkte) Ausgehend von der Green'schen Funktion $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}$ leite man das Fernfeld $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) = [E_x, E_y, E_z]$ eines einzelnen Dipols $\mathbf{p} = p\mathbf{n}_x$ mit Ursprung $\mathbf{r}' = (0,0,0)$ her.
   Hinweis: Im Fernfeld lautet die Green'sche Funktion
   $$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{r}' = 0) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{rr}}{r^2}\right] .$$

2. (4 Punkte) Benutzen Sie die Fraunhofer-Näherung, um das Fernfeld $\mathbf{E}^{(1)} = [E_x, E_y, E_z]$ eines einzelnen Dipols $\mathbf{p} = p\mathbf{n}_x$, positioniert am Ort $\mathbf{r}' = (0, -d, 0)$, zu berechnen.

3. (2 Punkte) In Analogie, bestimmen Sie das Fernfeld $\mathbf{E}^{(2)}$ des gegenüberliegenden, gegenphasigen Dipols bei $\mathbf{r}' = (0, d, 0)$, sowie das gemeinsame Feld $\mathbf{E}^{(1,2)} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}$.

4. (2 Punkte) Wir betrachten nun die beiden verbleibenden Dipole $\mathbf{p} = p\mathbf{n}_y$ (am Ort $\mathbf{r}' = (d, 0, 0)$) und $\mathbf{p} = -p\mathbf{n}_y$ (am Ort $\mathbf{r}' = (-d, 0, 0)$). Bestimmen Sie das gemeinsame Fernfeld $\mathbf{E}^{(3,4)} = \mathbf{E}^{(3)} + \mathbf{E}^{(4)}$.

5. (2 Punkte) Der Abstand d sei viel kleiner als die Wellenlänge λ. Gebrauchen Sie eine geeignete Näherung um zu zeigen, dass das gemeinsame Fernfeld der vier Dipole lautet:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \mathbf{E}^{(1,2)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{(3,4)}(\mathbf{r}) \;=\; 2\mathrm{i}\, p\, \omega^2 \mu_0\, kd \begin{bmatrix} y/r \\ -x/r \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}$$

6. (5 Punkte) Formulieren Sie das gemeinsame Fernfeld in sphärischen Koordinaten $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ und in sphärischen Vektorkomponenten $\mathbf{E} = [E_r(r,\theta,\phi), E_\theta(r,\theta,\phi), E_\phi(r,\theta,\phi)]$. Zeigen Sie, dass das Fernfeld transversal ist.
   Hinweis: Die kartesischen Einheitsvektoren lassen sich folgendermassen durch die sphärischen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} &= \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\
\hat{\mathbf{y}} &= \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\
\hat{\mathbf{z}} &= \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}$$

7. (2 Punkte) Man kann zeigen, dass das soeben berechnete Fernfeld genau dem Fernfeld eines strahlenden magnetischen Dipols der Stärke $m = \mathrm{i}2cpkd$ entspricht. Geben Sie eine plausible qualitative Erklärung für diesen Umstand und erklären Sie, in welche Richtung der magnetische Dipol $\mathbf{m}$ zeigt.
   Hinweis: Keine Rechnung erforderlich.

8. (5 Punkte) Berechnen Sie die abgestrahlte Intensität und die abgestrahlte Leistung der vier Dipole im Fernfeld jeweils als Funktion von $\mathbf{m}$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Strahlungsleistung eines elektrischen Dipols. Wie skaliert die abgestrahlte Leistung der vier Dipole mit der Schleifengrösse d?
   Hinweis: $\int \sin^3 ax\,\mathrm{d}x = \frac{\cos 3ax}{12a} - \frac{3\cos ax}{4a} + C$.