Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10L)

5. Februar 2014, 14.30-17.30 Uhr, ETF E1

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte Beachten Sie:

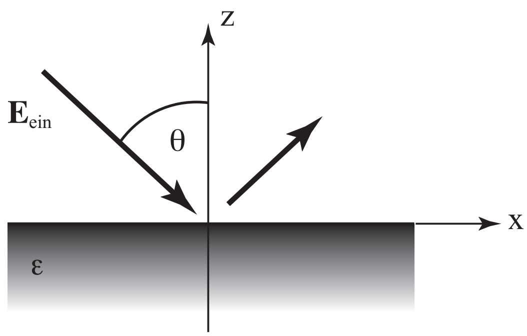
- Diese Prüfung besteht aus 4 Aufgaben und hat 2 beidseitig bedruckte Seiten exklusive dieses Deckblatts. Sie haben 3 Stunden Zeit, um die Aufgaben zu lösen.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **10 beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Keine Bücher, Vorlesungsmaterialien, Taschenrechner, Handys, oder Computer!
- Geben Sie dieses Blatt als Deckblatt für Ihre Lösungen ab.
- Die Zwischenrechnungen müssen angegeben werden und die Lösungen sind zu begründen.
- Benutzen Sie bitte kein rotes Schreibzeug (Korrekturfarbe).
- Schreiben Sie **nicht auf die Aufgabenblätter** (wird nicht korrigiert).
- Vergessen Sie nicht, **jedes Blatt mit Ihrem Namen** zu versehen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige weitere Hinweise von allgemeinem Interesse (Korrekturen von Schreibfehlern, etc.) werden während der Prüfung an die Wandtafel geschrieben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	**Punkte**	**Visum**
1		
2		
3		
4		
Total:		

1 Reflexion an ebener Grenzflaeche (25 Punkte)

Eine zeitharmonische zirkular-polarisierte eben Welle mit Kreisfrequenz ω trifft aus Vakuum kommend auf einen Halbraum mit $\varepsilon > 1$ unter dem Einfallswinkel θ (siehe Abbildung).



Die komplexe Feldamplitude des einfallenden Feldes ist gegeben durch

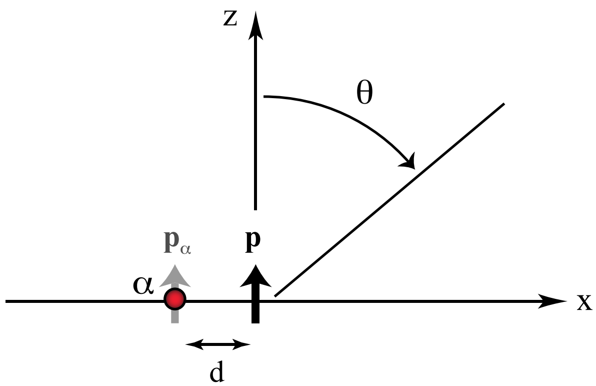
$$\mathbf{E}_{\text{ein}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ i \\ e_z \end{bmatrix} \mathrm{e}^{ik(\sin\theta\, x - \cos\theta\, z)}$$

wobei $k = \omega/c$ und e_z eine noch zu bestimmende Feldkomponente ist.

1. (3 Punkte) Bestimmen sie e_z und zeigen sie, dass die Divergenz des Feldes verschwindet.
2. (3 Punkte) Zerlegen sie $\mathbf{E}_{\text{ein}}$ in eine s-polarisierte und eine p polarisierte Welle.
3. (5 Punkte) Bestimmen sie das reflektierte Feld $\mathbf{E}_{\text{ref}}$ und das transmittierte Feld $\mathbf{E}_{\text{tra}}$ als Funktion der Fresnel Reflexionskoeffizienten r^p und r^s .
4. (3 Punkte) Unter welchen Bedingungen ist die reflektierte Welle auch zirkular polarisiert?
5. (3 Punkte) Unter welchen Bedingungen tritt Totalreflexion auf?
6. (8 Punkte) Berechnen sie die Leistung der reflektierten Welle (in Prozent der einfallenden Leistung).

2 **Strahlungsstörung** (25 Punkte)

Die Abstrahlung eines zeitharmonischen Dipols $\mathbf{p}$ (Wellenänge λ, Kreisfrequenz ω) wird durch ein kleines Partikel gestört. Das Partikel ist viel kleiner als die Wellenänge λ und kann durch eine Polarisierbarkeit α charakterisiert werden (siehe Figur).



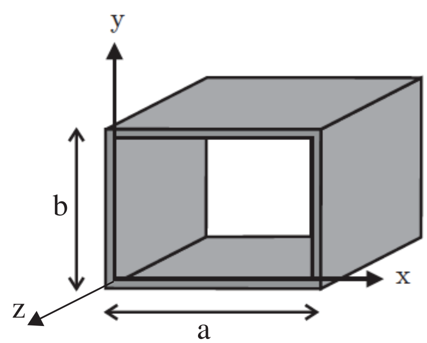
1. (5 Punkte) Bestimmen sie das elektrische Feld $\mathbf{E}$ des Dipols $\mathbf{p}$ am Ort des Partikels.
2. (5 Punkte) Das Feld am Partikel induziert nun einen sekundären Dipol $\mathbf{p}_\alpha = \alpha\mathbf{E}$. Nehmen sie an, dass der Abstand d zwischen Dipol und Partikel viel kleiner ist als λ und verwenden sie die Fraunhofer Näherung, um das Fernfeld $E_\theta^{(\alpha)}$ des sekundären Dipols $\mathbf{p}_\alpha$ zu bestimmen.
3. (5 Punkte) Bestimmen sie das gesamte Fernfeld E_θ, das sich aus den Feldern des primären und des sekundären Dipols zusammensetzt.
4. (10 Punkte) Berechnen sie die abgestrahlte Leistung P_{rad} als Funktion von α und d.

3 **Wellenleiter Moden** (25 Punkte)

Gegeben sei ein mit Luft gefüllter Rechteckhohlleiter der Länge *l* mit konstanten Querschnitt (*x* = *a* und *y* = *b*). Wir sind am elektromagnetischen Feld im Hohlleiter interessiert. Das elektrische Feld der einfallenden Welle ist durch folgende Funktion gegeben

$$\mathbf{H}(x, y, z) = H_o \sin(y\pi/b) \cos(x\pi/a) \exp(ik_z z)\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x} \ , \tag{1}$$

wobei k_z die Propagationskonstante für die x-polarisierte Welle ist. Die Welle oszilliert mit der Kreisfrequenz ω.



1. (5 Punkte) Welcher Mode entspricht das oben definierte Feld?
   Bestimmen Sie die Ausbreitungskonstante k_z.
   Bestimmen Sie die Stetigkeitsbedingungen für die Felder an der Grenzfläche $z = 0$.
   Berechnen Sie die Grenzfrequenz als Funktion des Seitenverhältnisses (b/a). Nehmen Sie an, dass $b < a$.

2. (5 Punkte) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}$ für die Welle als Funktion von H_o, ω, ϵ_0, μ_0, a, und b.

3. (5 Punkte) Berechnen Sie den komplexen Poynting-Vektor im Hohlleiter. In welche Richtung wird die Energie der Welle transportiert?

4. (5 Punkte) Bestimmen Sie die zeitlich gemittelte Gesamtenergie des Feldes im gegebenen Hohlleiterstück. Beachten Sie, dass:

$$\int_0^q dx \sin^2(\alpha x) = \frac{q}{2} - \frac{\sin 2\alpha q}{4\alpha} \qquad \int_0^q dx \cos^2(\alpha x) = \frac{q}{2} + \frac{\sin 2\alpha q}{4\alpha}$$

5. (5 Punkte) Was ist die kleinste Grenzfrequenz einer TM Grundmode im Hohlleiter?
   Was ist die kleinste Grenzfrequenz einer TE Grundmode im Hohlleiter?
   Darf sich eine TEM Grundmode im Hohlleiter ausbreiten? Warum oder warum nicht?

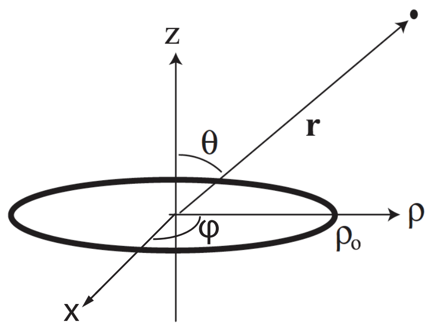
4 **Felder einer Leiterschleife** (25 Punkte)

Gegeben sei eine Leiterschleife, die einen Strom

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I_0 \cos(n\phi)\delta(\rho - \rho_0)\delta(z)\mathbf{n}_\phi \tag{2}$$

führt. n ist hier eine ganze Zahl, ρ, ϕ und z sind die Koordinaten im zylindrischen Koordinatensystem (siehe Abbildung) und $\mathbf{n}_\phi$ ist der Einheitsvektor in ϕ Richtung. Ausserdem sei die zeitliche Abhängigkeit gegeben durch

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r})\exp(-\imath\omega t). \tag{3}$$



1. (7 Punkte) Bestimmen Sie die zu $\mathbf{j}$ gehörende Ladungsdichte $k(\mathbf{r}, t) = k(\mathbf{r})\exp(-\imath\omega t)$.

2. (10 Punkte) Bestimmen Sie die Ausdrücke für das skalare, sowie das Vektorpotential. Die folgenden Integrale könnten Ihnen dabei helfen:

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\gamma)e^{\imath x\cos(\gamma-\delta)}d\gamma = 2\pi\imath^m J_m(x)\cos(m\delta) \tag{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\gamma)e^{\imath x\cos(\gamma-\delta)}d\gamma = 2\pi\imath^m J_m(x)\sin(m\delta) \tag{5}$$

Sie können auch die folgenden Vereinfachungen verwenden:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \simeq \frac{1}{\mathbf{r}} \tag{6}$$

$$\exp(\imath k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \simeq \exp\left(\imath k\left[r - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\right]\right) \tag{7}$$

$J_m(x)$ ist die Bessel-Funktion der m-ten Ordnung.

3. (8 Punkte) Wenn man relativistische Effekte der Elektronen in der Leiterschleife berücksichtigt, lautet der korrigierte Ausdruck für die Stromdichte

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{r}, t - \frac{\mathbf{r}}{v}). \tag{8}$$

Bestimmen Sie die neuen Ausdrücke für das skalare, sowie das Vektorpotential. Vereinfachen Sie die Ergebnisse soweit wie möglich.