Sessionsprüfung
Elektromagnetische Felder und Wellen (227-0052-10L)

22. August 2013, 14-17 Uhr, HIL F41

Prof. Dr. L. Novotny

Bitte Beachten Sie:

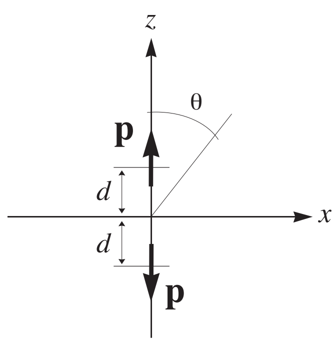
- Diese Prüfung besteht aus 5 Aufgaben und hat 3 beidseitig bedruckte Seiten exklusive dieses Deckblatts. Sie haben 3 Stunden Zeit, um die Aufgaben zu lösen.
- Einzig zugelassene Hilfsmittel sind **10 beidseitig beschriebene A4-Blätter**. Keine Bücher, Vorlesungsmaterialien, Taschenrechner, Handys, oder Computer!
- Geben Sie dieses Blatt als Deckblatt für Ihre Lösungen ab.
- Die Zwischenrechnungen müssen angegeben werden und die Lösungen sind zu begründen.
- Benutzen Sie bitte kein rotes Schreibzeug (Korrekturfarbe).
- Schreiben Sie **nicht auf die Aufgabenblätter** (wird nicht korrigiert).
- Vergessen Sie nicht, **jedes Blatt mit Ihrem Namen** zu versehen.
- Legen Sie bitte Ihre Legi auf den Tisch.
- Allfällige weitere Hinweise von allgemeinem Interesse (Korrekturen von Schreibfehlern, etc.) werden während der Prüfung an die Wandtafel geschrieben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	**Punkte**	**Visum**
1		
2		
3		
4		
5		
Total:		

1 Quadrupol Strahlung (20 Punkte)

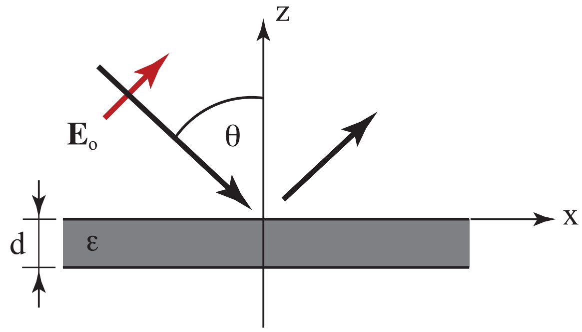
Ein Quadruol ist eine punktförmige neutrale Ladungsverteilung, die aus vier Ladungen besteht. Die Strahlung eines linearen Quadrupols kann durch zwei parallele Dipole mit kleiner Separation $2d \ll \lambda$ beschrieben werden (siehe Figur). Dabei oszillieren die zwei Dipole in entgegengesetzter Richtung (ausser Phase). Wir sind an den Fernfeldern bei $\mathbf{r}$ interessiert. Der Abstand $r = |\mathbf{r}|$ ist viel grösser als d, was uns erlaubt die Fraunhofer Näherung zu gebrauchen.



1. (3 Punkte) Ausgehend von der Green'schen Funktion $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}$ leite man das Fernfeld E_θ und H_ϕ eines einzelnen Dipols mit Ursprung $\mathbf{r}' = (0, 0, 0)$ her.
2. (4 Punkte) Benutzen sie die Fraunhofer Approximation um die Fernfelder E_θ, H_ϕ eines einzelnen Dipols mit Ursprung $\mathbf{r}' = (0, 0, d)$ zu bestimmen. Zeigen sie, dass die abgestrahlte Leistung dadurch nicht beeinträchtigt wird.
3. (3 Punkte) Bestimmen sie das Fernfeld E_θ des Quadrupols. Berücksichtigen sie, dass die Dipole $180°$ ausser Phase oszillieren und dass $d \ll \lambda$.
4. (4 Punkte) Berechnen sie die Intensität $I(\theta, \phi)$ des Quadrupols im Fernfeld und bestimmen sie die Winkel für welche $I(\theta, \phi)$ maximal wird.
5. (3 Punkte) Skizzieren sie die Abstrahlcharakteristik für $d \ll \lambda$.
6. (3 Punkte) Berechnen sie die abgestrahlte Leistung dW/dt für $d \to 0$. Begründen sie das Resultat.

2 Fabry-Pérot Resonanzen (25 Punkte)

Gegeben ist ein dielektrischer Film mit reeller Permittivität $\varepsilon > 1$, Permeabilität $\mu = 1$ und Dicke d. Dear Film ist nichtmagnetisch ($\mu = 1$) und umgeben von Luft ($\varepsilon = 1$). Wir betrachten die Reflexion einer p polarisierten ebenen Welle mit Wellenlänge λ und Feldstärke E_0 (siehe Figur). Gegeben sind die Parameter θ, ε, d, E_0 und λ.



1. (3 Punkte) Bestimmen sie die Komponenten des $\mathbf{k}$-Vektors im oberen, mittleren und unteren Medium als Funktion von λ, ε und θ. Für welche Einfallswinkel θ können evaneszente Wellen im Film angeregt werden? Was ist der Austrittswinkel der transmittierten Welle?

2. (3 Punkte) Schreiben sie das einfallende elektrische Feld $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ in Vektorform. Verwenden sie das Koordinatesystem, das in der Figur definiert ist.

3. (3 Punkte) Wiederholen sie obige Aufgabe für das einfallende magnetische Feld $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t)$.

4. (4 Punkte) Setzen sie in jedem Medium parzielle Wellen für das elektrische Feld an. Wieviele unbekannte Parameter gibt es insgesamt? Wieviele Randbedingungen brauchen sie um das Problem zu lösen? Ist dies ein homogenes oder inhomogenes Problem?

5. (5 Punkte) Anhand der Randbedingungen bei $z = 0$ und $z = -d$ erstellen sie ein Gleichungssystem in Matrixform für die unbekannten Parameter.

Die Lösung des Gleichungssystems führt auf folgende Lösung für den Reflexionskoeffizienten

$$r^p(k_x) = \frac{r_{1,2}^p + r_{2,3}^p \exp[2ik_{z_2}d]}{1 + r_{1,2}^p r_{2,3}^p \exp[2ik_{z_2}d]} \quad \text{wobei} \quad r_{i,j}^p = \frac{\epsilon_j k_{z_i} - \epsilon_i k_{z_j}}{\epsilon_j k_{z_i} + \epsilon_i k_{z_j}}.$$

$r_{i,j}^p$ ist der Fresnel Reflexionskoeffizient für eine einzelne Grenzfläche zwischen Medien i und j. Die k_{z_i} sind durch den Einfallswinkel θ bestimmt.

6. (4 Punkte) Bestimmen sie die kleinste Schichtdicke d ($d \neq 0$) für welche die reflektierte Strahlung komplett unterdrückt wird. Hinweis: d als Funktion von θ, ε und λ.

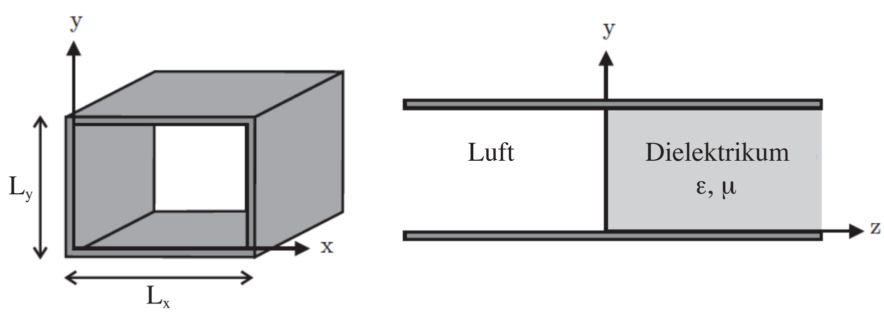
7. (3 Punkte) Welche Wellenlängen ausser λ werden ebenfalls ausgeblendet ?

3 Reflexion in Wellenleiter (20 Punkte)

Wie im Bild unten dargestellt, ändert sich das Medium bei $z = 0$ im Innern eines Rechteck-hohlleiters mit konstantem Querschnitt ($L_x \times L_y$). Wir sind daran interessiert, die Reflexion und Transmission einer Wellenleitermode, einfallend von $z < 0$ auf das dielektrische Medium (ε reell, $\mu = 1$) zu berechnen. Das elektrische Feld der einfallenden Welle ist durch folgende Funktion gegeben

$$\mathbf{E}(x, y, z) \;=\; E_0 \,\sin(y\,\pi/L_y)\,\mathrm{e}^{ik_z z}\,\mathbf{n}_x \;.$$

k_z ist die Propagationskonstante für die x polarisierte Welle. Die Welle oszilliert mit der Kreisfrequenz ω.



1. (3 Punkte) Welcher Mode entspricht das oben definierte Feld? Bestimmen Sie die Ausbreitungskonstante k_z.

2. (4 Punkte) Finden Sie die Ausbreitungskonstante für die reflektierte und für die transmittierte Welle.

3. (5 Punkte) Bestimmen sie das magnetische Feld $\mathbf{H}$ für die einfallende, reflektierte und transmittierte Welle als Funktion von E_0, ω, ε, und L_y.

4. (4 Punkte) Bestimmen sie die Stetigkeitsbedigungen für die Felder am Übergang $z = 0$ und leiten sie daraus die Reflexions- und Transmissionsfaktoren ab.

5. (4 Punkte) Wir betrachten nun eine Welle in entgegengesetzter Richtung. In welchem Frequenzbereich ω wird die Ausbreitung der transmittierten Welle unterdrückt? Hinweis: ω als Funktion von ε und L_y bestimmen.

4 Elektromagnetischer Puls in einem Dispersiven Medium (25 Punkte)

Am Ort $\mathbf{r}=0$ lautet das Feld eines elektromagnetischen Pulses

$$\mathbf{E}(z=0,t) \;=\; E_0 \, \cos\omega_0 t \, \frac{\sin\Delta\omega\, t}{\Delta\omega\, t} \, \mathbf{n}_x \; .$$

Dabei ist $\omega_0 \gg \Delta\omega$. Der Puls propagiert im freien Raum entlang der z Achse und das Feld ist näherungsweise unabhängig von den Koordinaten x und y (Strahldurchmesser $\gg \lambda$).

1. (3 Punkte) Bestimmen sie das Feld des Pulses an beliebigem Orten, d.h. $\mathbf{E}(z,t)$. Hinweis: Keine Rechnung.

2. (2 Punkte) Welcher Differentialgleichung muss dieses Feld genügen? Begründen sie, ohne zu rechnen, wieso das Feld dieser Gleichung genügt.

3. (4 Punkte) Berechnen sie das Spektrum $\hat{\mathbf{E}}(z,\omega)$ des Pulses. Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(bx)}{(bx)} \exp[iax]dx \;=\; \begin{cases} \pi/b & -b < a < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4. (3 Punkte) Skizzieren sie die spektrale Energiedichte $\left|\hat{\mathbf{E}}(z,\omega)\right|^2$ als Funktion von ω.

5. (2 Punkte) Zeigen sie, dass $\hat{\mathbf{E}}(z,\omega)$ die Helmholtz Gleichung erfüllt.

6. (4 Punkte) Der Puls propagiert nun in einem linearen, dispersiven Medium charakterisiert durch $\varepsilon(\omega)$ und $\mu(\omega)$. Wie muss das Spektrum $\hat{\mathbf{E}}(z,\omega)$ angepasst werden, damit diese DIfferentialgleichung erfüllt wird? Welcher Gleichung muss der Puls jetzt genügen?

7. (4 Punkte) Bestimmen sie das Spektrum $\hat{\mathbf{E}}(z,\omega)$ eines Pulses, der aus Vakuum kommend ($z < 0$) von der Oberfläche ($z = 0$) eines dispersiven Mediums reflektiert wird (senkrechter Einfall).

8. (3 Punkte) Wie berechnet sich das elektrische Feld $\mathbf{E}(z,t)$ des reflektierten Pulses? Hinweis: keine Rechnung.

5 Ausbreitung und Beugung von Feldern (10 Punkte)

Eine Antenne sendet Strahlung mit Wellenlänge λ aus. Bei $z = 0$ ist das Feld gegeben durch

$$\mathbf{E}(x, y, z = 0) \; = \mathbf{E_0} \begin{cases} \cos^2(kx)\cos^2(ky) & (-\pi/2 < kx < \pi/2 \; \text{ und } \; -\pi/2 < ky < \pi/2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $k = 2\pi/\lambda$.

1. (2 Punkte) Bestimmen sie approximativ die Distanz z, bei welcher des Feld von Fresnel zu Fraunhofer übergeht. Geben sie das Resultat als Funktion von λ an.
2. (5 Punkte) Berechnen sie das Fernfeld und beschreiben sie es in räumlichen Koordinaten (x, y, z).
3. (3 Punkte) Wie berechnet man das Feld in einer beliebigen Ebene z?

Hinweis: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 a \; \exp[-iab]\, da \; = \; 4\sin(\pi b/2) \,/\, [b^3 - 4b]$.