Datum: 10.04.2019

Zwischenprüfung

I Mathematische Grundlagen (35 Pkt.)

1. (1 Pkt.) Wir betrachten zwei komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ und Ihre jeweiligen komplexen Konjugationen a^*, b^*. Vervollständigen Sie folgende Relation

   - $|a-b|^2 = \boxed{aa^* + bb^* - 2\mathrm{Re}(ab^*)}$.

2. (2 Pkt.) Es sei $\alpha = p + \mathrm{i}q$ mit $p, q \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a und ϕ, beide aus $\mathbb{R}$, so, dass gilt $\alpha = a\exp[\mathrm{i}\phi]$

   - $a = \boxed{\sqrt{p^2+q^2}}$.
   - $\tan\phi = \boxed{q/p}$.

3. (2 Pkt.) Formulieren Sie beide Lösungen in der Polardarstellung mit Polarwinkel in Einheiten von π im Bereich $[-\pi, \pi]$

   - $\sqrt{-\mathrm{i}} = \boxed{\exp[\mathrm{i}\ 3\pi/4]}$, $\sqrt{-\mathrm{i}} = \boxed{\exp[-\mathrm{i}\ \pi/4]}$.

4. (3 Pkt.) Vervollständigen Sie folgende Relation unter ausschliesslicher Verwendung einer trigonometrischen Funktion
   (*Hinweis:* Denken Sie an die Darstellung der trigonometrischen Funktionen durch die komplexe Exponentialfunktion.)

   - $\frac{1}{2}\sin 2\theta = \boxed{\cos\theta \sin\theta}$.

5. (3 Pkt.) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x) = \exp\left[\sin(x^2)\right]$ am Punkt $x = \sqrt{\pi}$

   - $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\big|_{x=\sqrt{\pi}} = \boxed{-2\sqrt{\pi}}$.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

6. (4 Pkt.) Es gilt mit $k \in \mathbb{R}$

- $\int_0^\pi \mathrm{d}x \, \cos(kx) = \boxed{\sin(k\pi)/k}$.

7. (2 Pkt.) Es gilt

- $\int_0^\pi \mathrm{d}x \cos^2 x = \boxed{\pi/2}$.

8. (4 Pkt.) Die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ um $x_0 = 0$ lautet bis zur quadratischen Ordnung in x

- $f(x) = \boxed{1 + x^2/2 + \dots}$.

9. (2 Pkt.) Für den Positionsvektor $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ gilt

- $\nabla \times \mathbf{r} = \boxed{0}$.

10. (2 Pkt.) Für den Positionsvektor $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ gilt

- $\nabla \cdot \mathbf{r} = \boxed{3}$.

11. (4 Pkt.) Für den Abstand zum Ursprung $r = |\mathbf{r}|$ gilt
(Formulieren Sie Ihr Ergebnis unter ausschliesslicher Verwendung des Positionsvektors $\mathbf{r}$.)

- $\nabla r = \boxed{\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}}$.

12. (4 Pkt.) Mit dem Laplace-Operator ∇^2 gilt für das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} k^2 y^2 \\ k^2 x^2 + k^2 y^2 \\ \cos(kx) \end{pmatrix}$

- $\nabla^2 \mathbf{F} = \boxed{(2k^2,\ 4k^2,\ -k^2 \cos kx)^T}$.

13. (2 Pkt.) Es gilt für das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} k^2 y^2 \\ k^2 x^2 + k^2 y^2 \\ \cos(kx) \end{pmatrix}$

- $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \boxed{0}$.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

II Elektromagnetische Felder und Wellen (65 Pkt.)

1. (3 Pkt.) Verwenden Sie den Brechungsindex n, die Frequenz ω, die Lichtgeschwindigkeit c, sowie die x und y Komponenten des Wellenvektors (k_x bzw. k_y), um dessen z Komponente zu formulieren

   - $k_z = \boxed{\sqrt{n^2\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2}}$.

2. (3 Pkt.) Für den Brechungsindex n gilt in einem Medium mit Materialparametern μ, ε

   - $n = \boxed{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

3. (4 Pkt.) Drücken Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit c' einer elektromagnetischen Welle in einem Medium aus durch dessen Materialparameter ε, μ, sowie die Naturkonstanten ε_0, μ_0

   - $c' = \boxed{1/\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}}$.

4. (3 Pkt.) Formulieren Sie die Wellenlänge einer elektromagnetischen Welle mit Wellenvektor $\mathbf{k}$

   - $\lambda = \boxed{2\pi/\left|\mathbf{k}\right|}$.

5. (3 Pkt.) Formulieren Sie die quellfreie Wellengleichung für das reelle Magnetfeld $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$

   - $\boxed{\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0}$.

6. (4 Pkt.) Ein elektromagnetischer Puls propagiere im Vakuum in positive x-Richtung und sei y-polarisiert. Am Ort $x = 0$ laute die y-Komponente des Feldes als Funktion der Zeit

$$E_y(x = 0, t) = E_0 \exp\left[-\frac{(\omega t)^2}{\Delta^2}\right]\sin(\omega t).$$

   An einem beliebigen Ort und zu einer beliebigen Zeit lautet die y-Komponente des Feldes

   - $E_y(x, t) = E_0 \exp\left[-\frac{k^2\boxed{(ct - x)^2}}{\Delta^2}\right]\sin[k\,\boxed{(ct - x)}\,]$.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

7. (8 Pkt.) Die komplexe Darstellung des reellen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0\left[\cos(\mathbf{kr}+\omega t)+\sin(\mathbf{kr}+\omega t)\right]$ lautet

- $\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (1+\mathrm{i})\mathbf{E}_0 \exp\left[-\mathrm{i}\mathbf{kr}\right]}$.

8. (4 Pkt.) Der Poyntingvektor ist definiert als $\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t)$. Der zeitgemittelte Poyntingvektor für die zugehörigen komplexen Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ ergibt sich so zu

- $\boxed{\langle\mathbf{S}(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})\right]}$.

9. (4 Pkt.) Eine ebene Welle falle vom Medium 1 mit Brechungsindex n_1 auf eine Grenzfläche zu einem Medium mit Brechungsindex n_2 ein. Der Einfallswinkel sei α. Vervollständigen Sie folgende Bedingung für α, unter der es zu Totalreflexion kommt.

- $\boxed{\sin\alpha > n_2/n_1}$.

10. (4 Pkt.) Wir betrachten eine in der xz-Ebene polarisierte ebene Welle mit Wellenvektor $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)^T$, mit reeller elektrischer Feldamplitude $|\mathbf{E}(k_x x + k_z z = 0, t = 0)| = E_0$. Das komplexe elektrische Feld lautet (unter ausschliesslicher Verwendung der Amplitude E_0, der Wellenvektorkomponenten k_x, k_z und des Betrags $k = |\mathbf{k}|$)

- $$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \pm E_0 \begin{pmatrix} \boxed{-k_z/k} \\ \boxed{0} \\ \boxed{k_x/k} \end{pmatrix} \exp\left[\boxed{\mathrm{i}(k_x x + k_z z)}\right] .$$

11. (10 Pkt.) Zwei monochromatische ebene Wellen mit identischer Frequenz ω und Amplitude $E_0 \in \mathbb{R}$ propagieren in der xz Ebene im Vakuum. Die erste Welle propagiere unter dem Winkel $-\alpha$ zur z Achse, die zweite unter dem Winkel α. Beide Wellen seien s polarisiert relativ zur Einfallsebene, die in der xz Ebene liege. Formulieren Sie die Intensitätsverteilung in der Ebene $z = 0$ unter Verwendung von ω, der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c, des Einfallswinkels α, der Vakuumimpedanz Z_0 und der Feldamplitude E_0.

- $\boxed{I(x) = 2\,\frac{E_0^2}{Z_0}\;\cos^2\left[\frac{\omega}{c}\;x\;\sin(\alpha)\right]}$.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

12. (3 Pkt.) Der Polarisationszustand einer in der xy-Ebene unter dem Winkel α zur y-Achse propagierenden ebenen Welle, deren Magnetfeld in der xy-Ebene polarisiert ist, ist bezüglich einer Grenzfläche in der Ebene $x = 0$

    - s -polarisiert .

13. (3 Pkt.) Der Polarisationszustand der transmittierten Komponente einer auf eine Grenzfläche einfallenden links-zirkular polarisierten ebenen Welle ist

    ☐ links-zirkular polarisiert,

    ☐ rechts-zirkular polarisiert,

    ■ abhängig von den Materialparametern der die Grenzfläche bildenden Medien,

    ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

14. Betrachten Sie eine ebene Welle vom Typ $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

    (a) (3 Pkt.) Es sei $E_0 \in \mathbb{R}$. Für $\mathbf{E}_0 = E_0(1, 0, 0)^T$ gilt

    ☐ die Welle ist linear polarisiert,

    ☐ die Welle ist zirkular polarisiert,

    ■ die Welle erfüllt die Maxwell'schen Gleichungen nicht,

    ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

    (b) (3 Pkt.) Es sei $E_0 \in \mathbb{R}$. Für $\mathbf{E}_0 = E_0(0, \mathrm{i}, \mathrm{i})^T$ gilt

    ■ die Welle ist linear polarisiert,

    ☐ die Welle ist zirkular polarisiert,

    ☐ die Welle erfüllt die Maxwell'schen Gleichungen nicht,

    ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

    (c) (3 Pkt.) Es sei $E_0 \in \mathbb{R}$. Für $\mathbf{E}_0 = E_0(0, 1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i})^T$ gilt

    ☐ die Welle ist linear polarisiert,

    ■ die Welle ist zirkular polarisiert,

    ☐ die Welle erfüllt die Maxwell'schen Gleichungen nicht,

    ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

Ende der Prüfungsfragen.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!