Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2018
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Datum: 18.04.2018

Zwischenprüfung

I Mathematische Grundlagen (35 Pkt.)

1. (1 Pkt.) Für das Betragsquadrat $|c|^2$ einer komplexen Zahl $c = u + \mathrm{i}v$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ gilt

   ☐ $|c|^2 = (c + c^*)^2$,
   ■ $|c|^2 = c^*c$,
   ☐ $|c|^2 = u^2 - v^2$,
   ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

2. (1 Pkt.) Für das Betragsquadrat $|a - b|^2$ der Summe zweier komplexer Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ gilt

   ☐ $|a - b|^2 = a^2 + b^2 + 2ab$,
   ☐ $|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2$,
   ■ $|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2\mathrm{Re}(a^*b)$,
   ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

3. (1 Pkt.) Für den Imaginärteil einer komplexen Zahl $c \in \mathbb{C}$ gilt

- ☐ $\mathrm{Im}(c) = \frac{1}{2}(c - c^*)$,
- ☐ $\mathrm{Im}(c) = \frac{\mathrm{i}}{2}(c - c^*)$,
- ■ $\mathrm{Im}(c) = \frac{\mathrm{i}}{2}(c^* - c)$,
- ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

4. (1 Pkt.) Es gilt

- ■ $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + \mathrm{i})$,
- ☐ $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \mathrm{i})$,
- ☐ $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} = \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i})$
- ☐ $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i})$.

5. (1 Pkt.) Es gilt

- ☐ $\mathrm{i}^\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\sqrt{\pi}}$,
- ■ $\mathrm{i}^\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\pi/2}$,
- ☐ $\mathrm{i}^\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}}$,
- ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

6. (1 Pkt.) Es gilt

- ■ $\mathrm{Im}\sqrt{\mathrm{i}} = 1/\sqrt{2}$,
- ☐ $\mathrm{Im}\sqrt{\mathrm{i}} = 0$,
- ☐ $\mathrm{Im}\sqrt{\mathrm{i}} = -1$,
- ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

7. (2 Pkt.) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-2)^3}$ am Punkt $x = 3$.

   - $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\big|_{x=3} = \boxed{-8}$.

8. (3 Pkt.) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x) = \sin[\cos(x^2)]$ am Punkt $x = \sqrt{\pi}/2$.

   - $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\big|_{x=\sqrt{\pi}/2} = \boxed{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(1/\sqrt{2})}$.

9. (4 Pkt.) Das folgende bestimmte Integral der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-k|r|}$ mit lautet für $k > 0$

   - $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}r\, f(x) = \boxed{2/k}$.

10. (3 Pkt.) Es gilt

    - $\int\limits_{0}^{\pi/4} \mathrm{d}x \cos x = \boxed{1/\sqrt{2}}$.

11. (3 Pkt.) Es gilt

    - $\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{d}x \cos^2 x = \boxed{1/2}$.

12. (5 Pkt.) Die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ um $x_0 = 0$ lautet bis zur quadratischen Ordnung in x

    - $f(x) = \boxed{1 - x^2 + \mathcal{O}(x^4) \quad \text{the O(x4) is optional}}$.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

13. (1 Pkt.) Für den Positionsvektor $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ gilt

- ☐ $\nabla \cdot \mathbf{r} = 0$,
- ☐ $\nabla \cdot \mathbf{r} = 1$,
- ☐ $\nabla \cdot \mathbf{r} = 2$,
- ■ keiner der angegebenen Vorschläge.

14. (3 Pkt.) Für den radialen Abstand $r = |\mathbf{r}|$ vom Ursprung gilt

- ☐ $\nabla \cdot \nabla r = 1/r$,
- ■ $\nabla \cdot \nabla r = 2/r$,
- ☐ $\nabla \cdot \nabla r = r/2$,
- ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

15. (3 Pkt.) Mit dem Laplace-Operator ∇^2 gilt für das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 + y^2 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \end{pmatrix}$

- ■ $\nabla^2 \mathbf{F} = (2, 4, -k^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx})^T$,
- ☐ $\nabla^2 \mathbf{F} = 2$,
- ☐ $\nabla^2 \mathbf{F} = (0, 2, 0)^T$,
- ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

16. (2 Pkt.) Mit dem Laplace-Operator ∇^2 gilt für das skalare Feld $f(r) = r^2$ mit der Radiuskoordinate $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- ☐ $\nabla^2 f(r) = 4$,
- ☐ $\nabla^2 f(r)$ ist nicht definiert,
- ☐ $\nabla^2 f(r) = \mathbf{r}$,
- ■ keiner der angegebenen Vorschläge.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

II Elektromagnetische Felder und Wellen (65 Pkt.)

1. (3 Pkt.) Die Dispersionsrelation in einem Medium mit Brechungsindex n lautet

   ☐ $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = n\frac{\omega^2}{c^2}$,

   ☐ $k_z = \sqrt{n\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}$,

   ☐ $k_z = \sqrt{n^2\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 + k_y^2}$,

   ■ keiner der angegebenen Vorschläge.

2. (3 Pkt.) Für den Brechungsindex n gilt in einem Medium mit Materialparametern μ, ε

   • $n = \boxed{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

3. (3 Pkt.) In einem Medium mit Brechungsindex n gilt für die Wellenlänge λ elektromagnetischer Strahlung der Frequenz ω mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c

   • $\lambda = \boxed{2\pi\frac{c}{n\omega}}$.

4. (3 Pkt.) In einem Medium mit Materialparametern $\mu, \varepsilon > 1$ ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit v einer monochromatischen elektromagnetischen Welle

   ☐ $v = n\,c$,

   ■ $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon}}$,

   ☐ $v = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}c$,

   ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

5. (3 Pkt.) Im quellfreien Vakuum gilt für das reelle dielektrische Verschiebungsfeld $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$

   ☐ $\left[\nabla^2 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0$,

   ☐ $\left[\nabla^2 + k^2\right]\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0$,

   ■ $\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0$,

   ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

6. (3 Pkt.) Wir betrachten eine z-polarisierte und in x-Richtung propagierende, monochromatische ebene Welle mit Wellenzahl k und Kreisfrequenz ω, für deren reelle elektrische Feldamplitude gelte $E(x=0, t=\frac{\pi}{2\omega}) = E_0$. Das komplexe elektrische Feld lautet

   - $$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{\mathrm{i}} \end{pmatrix} \exp\left[k \, \boxed{\mathrm{i}x} \right] .$$

7. (3 Pkt.) Für die komplexen elektrischen und magnetischen Felder einer ebenen Welle gilt mit der Wellenimpedanz Z

   - ☐ $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{Z} \left[\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})\right]$,
   - ■ $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{Z} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right]$,
   - ☐ $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -Z \left[\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})\right]$,
   - ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

8. (3 Pkt.) Betrachten Sie das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (1+\mathrm{i})\mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{kr}}$ mit $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{R}^3$. Wie lautet das dazugehörige reelle Feld?

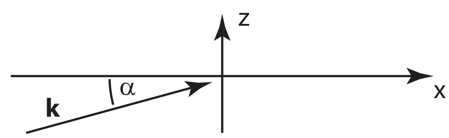
   - ■ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \left[\cos(\mathbf{kr} + \omega t) + \sin(\mathbf{kr} + \omega t)\right]$,
   - ☐ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \left[-\cos(\mathbf{kr} + \omega t) - \sin(\mathbf{kr} + \omega t)\right]$,
   - ☐ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \left[\cos(\mathbf{kr} + \omega t) - \sin(\mathbf{kr} + \omega t)\right]$,
   - ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

9. (3 Pkt.) Betrachten Sie das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}}$ mit $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{R}^3$ im Vakuum. Wie lautet die Intensität in der Ebene $z = 0$?

   - ☐ $I(z=0) = \frac{1}{Z_0} |\mathbf{E}_0|^2$,
   - ☐ $I(z=0) = \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{E}_0|^2$,
   - ☐ $I(z=0) = \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{E}_0|^2 \cos(kx)$,
   - ■ keiner der angegebenen Vorschläge.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

10. (4 Pkt.) Wie lautet das komplexe elektrische Feld einer in der xz-Ebene unter dem Winkel α zur x-Achse propagierenden ebenen Welle mit Amplitude E_0, die in der xz-Ebene polarisiert ist? Wählen Sie die Einträge des Polarisationsvektors rein reell.



- $$\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} \boxed{-\sin\alpha} \\ \boxed{0} \\ \boxed{\cos\alpha} \end{pmatrix} \exp\left[\mathrm{i}k \boxed{(x\cos\alpha + z\sin\alpha)}\right],$$

Solution comment: Sign swap in polarization vector is ok.

11. (3 Pkt.) Eine in der xz-Ebene unter dem Winkel α zur x-Achse propagierende ebene Welle, deren Magnetfeld in der xz-Ebene polarisiert ist, ist bezüglich einer Grenzfläche in der Ebene $z = 0$

■ s-polarisiert,
☐ p-polarisiert,
☐ zirkular polarisiert,
☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

12. (3 Pkt.) Die Polarisation der reflektierten Komponente einer auf eine Grenzfläche einfallenden links-zirkular polarisierten ebenen Welle ist stets

☐ links-zirkular polarisiert,
☐ rechts-zirkular polarisiert,
■ abhängig von den Fresnel-Koeffizienten,
☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

13. Betrachten Sie eine ebene Welle vom Typ $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{ikz}$.

(a) (3 Pkt.) Es sei $E_0 \in \mathbb{R}$. Für $\mathbf{E}_0 = E_0(\mathrm{i}, 0, 0)^T$ gilt

- ■ die Welle ist linear polarisiert,
- ☐ die Welle ist zirkular polarisiert,
- ☐ die Welle erfüllt die Maxwell'schen Gleichungen nicht,
- ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

(b) (3 Pkt.) Es sei $E_0 \in \mathbb{R}$. Für $\mathbf{E}_0 = E_0(1, 0, 1)^T$ gilt

- ☐ die Welle ist linear polarisiert,
- ☐ die Welle ist zirkular polarisiert,
- ■ die Welle erfüllt die Maxwell'schen Gleichungen nicht,
- ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

(c) (3 Pkt.) Es sei $E_0 \in \mathbb{R}$. Für $\mathbf{E}_0 = E_0(1 - \mathrm{i}/2, 1 + \mathrm{i}, 0)^T$ gilt

- ☐ die Welle ist linear polarisiert,
- ☐ die Welle ist zirkular polarisiert,
- ☐ die Welle erfüllt die Maxwell'schen Gleichungen nicht,
- ■ keiner der angegebenen Vorschläge.

14. (3 Pkt.) Ein elektromagnetischer Puls propagiere im Vakuum in negative x-Richtung und sei y-polarisiert. Zum Zeitpunkt $t = 0$ laute die y-Komponente des Feldes

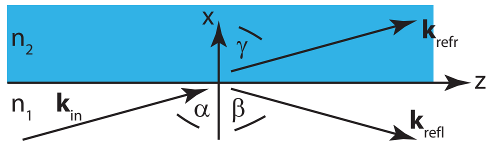
$$E_y(x, t = 0) = E_0 \exp\left[-\frac{(kx)^2}{\Delta^2}\right] \sin(kx).$$

An einem beliebigen Ort und zu einer beliebigen Zeit lautet die y-Komponente des Feldes

- $E_y(x,t) = E_0 \exp\left[-\frac{k^2 \boxed{(x+ct)^2}}{\Delta^2}\right] \sin[k \boxed{(x+ct)}]$.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

15. Eine ebene Welle propagiere unter dem Winkel α zur x-Achse auf eine Grenzfläche bei $x = 0$ zu. Im Bereich $x > 0$ sei der Brechungsindex n_2, im Bereich $x < 0$ sei er $n_1 < n_2$. Es entsteht eine reflektierte Welle mit Wellenvektor $\mathbf{k}_{\text{refl}}$ und eine gebrochene Welle mit Wellenvektor $\mathbf{k}_{\text{refr}}$, wie unten skizziert.



(a) (2 Pkt.) Es gilt

- ☐ $\alpha > \beta$,
- ■ $\alpha < \beta$,
- ■ $\alpha = \beta$,
- ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

(b) (2 Pkt.) Es gilt

- ☐ $n_2 \sin(\alpha) = n_1 \sin(\gamma)$,
- ■ $\sin(\alpha)/n_2 = \sin(\gamma)/n_1$,
- ☐ $\alpha < \gamma$,
- ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

(c) (2 Pkt.) Es kommt zu Totalreflexion wenn gilt

- ☐ $\alpha > \arcsin(n_2/n_1)$,
- ☐ $\alpha > \arcsin(n_1/n_2)$,
- ☐ $\alpha > \arcsin(n_2 n_1)$,
- ■ keiner der angegebenen Vorschläge.

(d) (2 Pkt.) Wir bezeichnen die x-Komponente des Wellenvektors $\mathbf{k}$ mit k_x. Es gilt

- ☐ $k_{\text{in,x}} = k_{\text{refl,x}}$,
- ☐ $k_{\text{in,x}} = (n_1/n_2) k_{\text{refl,x}}$,
- ☐ $k_{\text{in,x}} = (n_2/n_1) k_{\text{refl,x}}$,
- ■ keiner der angegebenen Vorschläge.

(e) (2 Pkt.) Wir bezeichnen die z-Komponente des Vektors $\mathbf{k}$ mit k_z. Es gilt

- ☐ $k_{\text{in,z}} < k_{\text{refr,z}}$,
- ☐ $k_{\text{in,z}} = (n_2/n_1) k_{\text{refl,x}}$,
- ☐ $k_{\text{in,z}} = (n_2/n_1) k_{\text{refr,z}}$,
- ■ keiner der angegebenen Vorschläge.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!

16. An Grenzflächen gilt allgemein aufgrund der Randbedingungen in Abwesenheit von Oberflächenladungen und -strömen

(a) (2 Pkt.)

- ☐ Parallel- und Normalkomponente des $\mathbf{E}$-Feldes sind an Grenzflächen erhalten,
- ■ die Parallelkomponente des $\mathbf{E}$-Feldes ist an Grenzflächen erhalten,
- ☐ die Normalkomponente des $\mathbf{E}$-Feldes ist an Grenzflächen erhalten,
- ☐ keiner der angegebenen Vorschläge.

(b) (2 Pkt.) Der Poyntingvektor ist definiert als $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Unter Verwendung der komplexen Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ lautet der zeitgemittelte Poyntingvektor somit

- $\langle \mathbf{S} \rangle = \boxed{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})^*\right\}}$.

17. (2 Pkt.) Für die Fresnel'schen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten gilt

- ☐ $(r^s)^2 + (r^p)^2 = 1,$
- ☐ $|r^s|^2 + |t^s|^2 = 1,$
- ☐ $r^s + t^s + r^p + t^p = 1,$
- ■ keiner der angegebenen Vorschläge.

Ende der Prüfungsfragen.

Seite für Ihre Notizen. Wird nicht bewertet!