Erläuterungen zu Green'schen Funktionen

Wir betrachten die Wellen $A(\mathbf{r})$ an einer Wasseroberfläche, die durch eine Handvoll Sandkörner mit der Verteilung $B(\mathbf{r})$ verursacht werden. Die Beziehung zwischen A und B lässt sich mathematisch durch eine lineare partielle Differentialgleichung formulieren

$$\mathcal{L}\, A(\mathbf{r}) \;=\; B(\mathbf{r})\ . \tag{1}$$

Wichtig ist, dass die Wellen $A(\mathbf{r})$ auch dort existieren, wo keine Sandkörner eintreffen, das heisst, wo $B(\mathbf{r}) = 0$! In der Folge betrachten wir nur solche Raumpunkte $\mathbf{r}$.

Es ist einfacher, zuerst die Welle $G(\mathbf{r})$ eines einzelnen Sandkornes zu verstehen. Diese Welle gehorcht der gleichen Gleichung (es ist dieselbe Wasseroberfläche)

$$\mathcal{L}\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\rm n}) \;=\; \delta(\mathbf{r}_{\rm n})\ . \tag{2}$$

$\delta(\mathbf{r}_{\rm n})$ bezeichnet den Auftreffort des Sandkorns. Um den Ursprungsort der Welle festzuhalten, schreiben wir die Koordinate $\mathbf{r}_{\rm n}$ in das Argument der Welle G.

Jedes Sandkorn hat sein eigenes Gewicht B und somit variiert die Amplitude der Welle von Sandkorn zu Sandkorn. Wir multiplizieren deshalb obige Gleichung mit B und kriegen

$$\mathcal{L}\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\rm n})\; B(\mathbf{r}_{\rm n}) \;=\; B(\mathbf{r}_{\rm n})\, \delta(\mathbf{r}_{\rm n})\ . \tag{3}$$

Es muss betont werden, dass der Wellen-Operator $\mathcal{L}$ auf die Koordinaten der Welle $(\mathbf{r})$ wirkt, und nicht auf die Gewichte $B(\mathbf{r}_{\rm n})$.

Wir verstehen nun, wie eine Welle auf der Wasseroberfläche (Koordinate $\mathbf{r}$) durch ein einzelnes Sandkorn mit Gewicht B am Ort $\mathbf{r}_{\rm n}$ erzeugt wird. Wir möchten nun die Wellenausbreitung für eine Handvoll Sandkörner verstehen. Da das System <u>linear</u> ist, gilt das Superpositionsprinzip, und wir können die Wellen von einzelnen Sandkörnern einfach aufsummieren

$$\sum_{\rm n} \mathcal{L}\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\rm n})\; B(\mathbf{r}_{\rm n}) \;=\; \sum_{\rm n} B(\mathbf{r}_{\rm n})\, \delta(\mathbf{r}_{\rm n})\ . \tag{4}$$

Die Summe der Sandkörner auf der rechten Seite entspricht ganz einfach der ursprünglichen Sandkorn Verteilung $B(\mathbf{r})$ (siehe Gleichung 1). Dementsprechend muss der Ausdruck auf der linken Seite gleich $\mathcal{L}\, A(\mathbf{r})$ sein, das heisst,

$$\mathcal{L}\, A(\mathbf{r}) \;=\; \sum_{\rm n} \mathcal{L}\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\rm n})\; B(\mathbf{r}_{\rm n})\ . \tag{5}$$

Da wir nur Wellen ausserhalb der Sandkorn-Auftreffpunkte $\mathbf{r}_{\rm n}$ betrachten, ist $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_{\rm n}$ und folglich ist $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\rm n})$ regulär. Wir dürfen dann die Reihenfolge von Summation und Operation vertauschen und kriegen

$$\mathcal{L}\, A(\mathbf{r}) \;=\; \mathcal{L} \sum_{\rm n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\rm n})\; B(\mathbf{r}_{\rm n})\ . \tag{6}$$

Diese Gleichung gilt für beliebige Orte $\mathbf{r}$ ausserhalb des Quellgebietes V, was nur erfüllt werden kann, wenn die Argumente auf beiden Seiten identisch sind, das heisst,

$$A(\mathbf{r}) \;=\; \sum_{\mathrm{n}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\mathrm{n}})\; B(\mathbf{r}_{\mathrm{n}})\; . \tag{7}$$

Somit haben wir eine Lösung für die ursprüngliche Gleichung (1) gefunden.

Wenn nun die Sandkorn-Verteilung kontinuierlich ist, dann geht die Verteilung B in eine Verteilungsdichte über und die Summe wird zum Integral

$$A(\mathbf{r}) \;=\; \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\mathrm{n}})\; B(\mathbf{r}_{\mathrm{n}})\, d^3\mathbf{r}_{\mathrm{n}}\; . \tag{8}$$