Übung 1

Abgabe: 28.02. bzw. 03.03.2020

Elektromagnetische Felder und Wellen
Frühjahrssemester 2020
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Elektro- und Magnetostatik

In dieser Übung befassen wir uns mit den Grundlagen der Elektro- und Magnetostatik. In der ersten Aufgabe erinnern wir uns an einige mathematische Werkzeuge, insbesondere der Vektoranalysis, deren Beherrschung für diese Vorlesung unabdinglich sind. Die zweite Aufgabe befasst sich mit dem Helmholtz-Spulenpaar, einer technologisch wichtigen Anordnung zur Erzeugung räumlich homogener Magnetfelder. In der dritten Aufgabe widmen wir uns dem Potential eines elektrischen Dipols. Seine Feldverteilung dominiert in grossem Abstand jeder Ladungsverteilung mit endlichem Dipolmoment und sollte uns darum stets präsent sein. Zudem dienen uns die Aufgaben, um den Umgang mit verschiedenen Koordinatensystemen zu üben.

1 Grundlagen der Vektoranalysis (20 Pkt.)

(a) (2 Pkt.) Beweisen Sie die Operatoridentität $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$.

(b) (8 Pkt.) Verifizieren Sie den Satz von Gauss für das Vektorfeld $\mathbf{F} = ax\mathbf{e}_x + by\mathbf{e}_y + cz\mathbf{e}_z$ und das Volumen $V = \{\mathbf{r} : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

(c) (10 Pkt.) Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld $\mathbf{G} = (4x/3 - 2y)\mathbf{e}_x + (3y - x)\mathbf{e}_y$ und die Fläche $A = \{\mathbf{r} : (x/3)^2 + (y/2)^2 \leq R^2, z = 0\}$.

2 Helmholtz-Spule (30 Pkt.)

Die Erzeugung homogener Magnetfelder ist essentiell in der Materialcharakterisierung, zur Sondenkalibrierung und zur Auslöschung des Erdmagnetfeldes. Um ein gut zugängliches, nahezu homogenes Magnetfeld zu erzeugen, verwendet man häufig Helmholtz-Spulen. Diese bestehen aus zwei identischen, kreisförmigen Spulen im Abstand d, die symmetrisch entlang einer gemeinsamen Achse angeordnet sind [siehe Abb. 1(b)] und den gleichen Strom mit derselben Richtung führen.

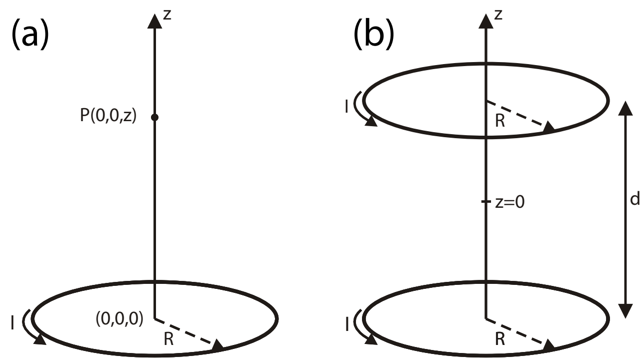

Abbildung 1: Schema (a) einer einzelnen Spule und (b) eines Helmholtz-Spulen-Paares. Die Spulen haben den Radius R, den Abstand d und sind symmetrisch zur z-Achse angeordnet.

(a) (12 Pkt.) Betrachten Sie Abb. 1(a) und berechnen Sie die magnetische Flussdichte $\mathbf{B}$ der stromdurchflossenen Leiterschleife mit Radius R am Punkt $P = (0, 0, z)$.
Hinweis: Nutzen Sie die vorhandene Symmetrie.

(b) (10 Pkt.) Betrachten Sie nun das Helmholtz-Spulenpaar in Abb. 1(b). Berechnen Sie die magnetische Flussdichte entlang der z-Achse. Verwenden Sie dabei die Lösung aus Aufgabe 2(a). Verifizieren Sie, dass das Feld auf halbem Weg zwischen den beiden Spulen ($z = 0$) in erster Näherung homogen ist, indem Sie zeigen, dass $\partial B/\partial z|_{z=0} = 0$.

(c) (8 Pkt.) Welchen Wert muss der Abstand d zwischen den beiden Spulen haben, damit das Magnetfeld im Zentrum zwischen den beiden Spulen auch in zweiter Näherung homogen ist? Dazu soll auch die zweite Ableitung des Magnetfeldes bezüglich z am Ort $z = 0$ verschwinden. Geben Sie zudem einen vereinfachten Ausdruck für die magnetische Flussdichte $B(z = 0)$ in der Helmholtz-Spule an.

3 Der statische elektrische Dipol (50 Pkt.)

Die Maxwell'schen Gleichungen sind ein Satz von Differentialgleichungen, deren Lösungen von den Quelltermen und den Randbedingungen abhängen. In der Realität können wir lediglich für verhältnismässig einfache Probleme analytische Lösungen für die Felder finden. Oftmals erlauben uns diese Lösungen einfacher Fälle jedoch, kompliziertere Probleme in ausgezeichneter Näherung zu lösen. Ein Standardparadigma der Elektrostatik ist der Punktdipol, mit dem wir uns im Folgenden befassen.

(a) (6 Pkt.) Am Ort $\mathbf{r} = 0$ befinde sich eine Punktladung Q in einem Medium mit Dielektrizitätskonstante ε. Formulieren Sie zunächst das Coulombpotential und überzeugen Sie sich durch explizite Rechnung, dass es die Laplace-Gleichung an jedem Punkt im Raum, ausser am Ursprung erfüllt.
Hinweis: Das Coulombpotential ist vom Typ $\Phi(\mathbf{r}) \propto r^{-1}$.

(b) (3 Pkt.) Welche Gleichung erfüllt das Coulombpotential am Ursprung?

(c) (5 Pkt.) Berechnen Sie aus dem Coulombpotential das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ der Punktladung. Verwenden Sie hierzu den Gradientenoperator in sphärischen Koordinaten, den Sie einer geeigneten Formelsammlung entnehmen können.

(d) (6 Pkt.) Am Ort $z = d/2$ befinde sich die Ladung q, am Ort $z = -d/2$ die Ladung $-q$. Bestimmen Sie das elektrische Potential $\Phi(r)$ des Dipols.
Hinweis: Das Konstrukt des Dipols entsteht im Grenzwert $q \to \infty$, $d \to 0$ mit $p = qd = \mathrm{const.}$

Wir betrachten nun ein Beispiel, in dem der elektrische Dipol nützlich ist. Am Ursprung befinde sich eine dielektrische Kugel aus einem Medium mit Dielektrizitätskonstante ε_1 und Radius a. Die Kugel befinde sich zwischen zwei Kondensatorplatten bei $z = -d/2$ und $z = d/2$ mit unendlicher Ausdehnung, an die die Spannung V angelegt ist. Im Kondensator befinde sich ein Medium mit Dielektrizitätskonstante ε_2 und zudem gelte $d \gg a$.

(e) (3 Pkt.) Bestimmen Sie das Feld E_0, das zwischen den Kondensatorplatten herrscht, in Abhängigkeit von d und V.

(f) (5 Pkt.) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass der folgende Ansatz für das Potential die Laplace-Gleichung erfüllt

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \Phi_1 & = -E_0 r \cos\theta + A\frac{\cos\theta}{r^2}, \quad \mathrm{r} > a \\ \Phi_2 & = B r \cos\theta, \quad \mathrm{r} < a. \end{cases} \tag{1}$$

Verwenden Sie hierzu den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, den Sie in einer geeigneten Formelsammlung finden.

(g) (2 Pkt.) Argumentieren Sie, warum obiger Ansatz vom Azimuthalwinkel ϕ unabhängig sein muss.

(h) (3 Pkt.) Zeigen Sie, dass das Feld in grosser Entfernung des Partikels, wie zu erwarten, gleich dem Feld im Kondensator in Abwesenheit des Partikels ist. Machen Sie sich klar, welcher Teil des Potentials Φ_1 vom einfallenden Feld stammt und welcher Teil dem polarisierten Partikel zuzuschreiben ist.

(i) (6 Pkt.) Das Potential muss die Randbedingung $\Phi_1|_{r=a} = \Phi_2|_{r=a}$ auf der Kugeloberfläche erfüllen. Ausserdem muss die Normalkomponente des Verschiebungsfeldes $\mathbf{D}$ auf der Grenzfläche stetig sein. Bestimmen Sie A und B entsprechend, und geben Sie das resultierende Potential an.

(j) (3 Pkt.) Berechnen Sie das elektrische Feld im Kondensator in Gegenwart der Kugel ausserhalb der Kugel.

(k) (5 Pkt.) Zeigen Sie, dass das von der polarisierten Kugel erzeugte Feld im Kondensator exakt dem eines elektrischen Dipols entspricht. Machen Sie sich klar, dass sich das von der polarisierten Kugel erzeugte Feld ausserhalb ihres Volumens durch einen mathematischen Punktdipol an ihrem Mittelpunkt beschreiben lässt. Bestimmen Sie im Zuge Ihrer Überlegungen das Dipolmoment $\mathbf{p}$ der polarisierten Kugel.

(l) (3 Pkt.) Die Polarisierbarkeit α ist definiert als Proportionalitätskonstante zwischen angelegtem elektrischem Feld und induziertem Dipolmoment. Formulieren Sie α für das Partikel mit Dielektrizitätskonstante ε_1 im Medium mit Dielektrizitätskonstante ε_2.