Übung 12

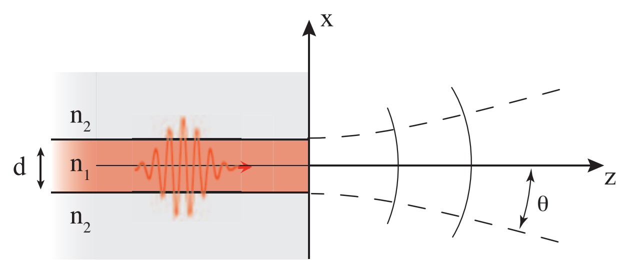
Abgabe: 28.05. bzw. 31.05.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Wellenleiter und Resonatoren

1 Numerische Apertur eines Wellenleiters (35 Pkt.)

Licht, das aus dem Ende eines Wellenleiters austritt, divergiert. Der Divergenzwinkel θ (gemessen zur optischen Achse z) der Lichtintensität wird durch die numerische Apertur $\mathrm{NA} = \sin\theta$ spezifiziert. Wir betrachten hier einen planaren dielektrischen Wellenleiter im Raumbereich $z < 0$. Das Feld wird geführt in einer Schicht mit Brechungsindex n_1 im Raumvolumen $-d/2 < x < d/2$, die von einem Medium mit Brechungsindex $n_2 < n_1$ umgeben ist. Der Raumbereich $z > 0$ sei von Vakuum gefüllt, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.



Wir betrachten zunächst den in z-Richtung unendlich ausgedehnten Wellenleiter.

(a) (4 Punkte) Die Propagationskonstante der fundamentalen TE_1 Wellenleitermode bei Kreisfrequenz ω sei $k_z = n_{\mathrm{eff}}\, k_0$, wobei gelte $k_0 = \omega/c$ (mit c der Vakuumlichtgeschwindigkeit) und $n_{\mathrm{eff}} \in \mathbb{R}$ sei der effektive Brechungsindex der Mode. Definieren Sie den zulässigen Wertebereich von n_{eff} und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Lösung:
Das Feld der fundamentalen Wellenleiter Mode TE_1 muss im oberen und unteren Medium (n_2) exponentiell von der Grenzfläche abfallen, das heisst, $k_{x_2} = \sqrt{n_2^2\, k_0^2 - k_z^2}$ muss imaginär sein. Daraus folgt $n_{\mathrm{eff}} > n_2$. Zudem muss $k_z < k_1$ gelten, da die Wellenleitermode in z-Richtung propagierend sein soll. Dies bedingt $n_{\mathrm{eff}} < n_1$, und demzufolge $n_2 < n_{\mathrm{eff}} < n_1$.

(b) (8 Punkte) Bestimmen Sie die komplexe elektrische Feldverteilung $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ der fundamentalen TE_1 Mode des unendlich ausgedehnten Wellenleiters mit Propagationskonstante $k_z = n_{\mathrm{eff}}\, k_0$ in den Raumbereichen $x \leq -d/2$, $-d/2 < x < d/2$ und $x \geq d/2$. Drücken Sie sämtliche

Propagationskonstanten durch k_0, n_{eff}, n_1 und n_2 aus. Die Feldamplitude bei $x = 0$ sei E_0.
Hinweis: Beachten Sie, welche Randbedingungen das elektrische Feld an den Grenzflächen erfüllen muss.

Lösung:
TE-Moden haben per Definition keine elektrische Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung. Somit zeigt das elektrische Feld in $\mathbf{n}_y$-Richtung. In x-Richtung fällt das Feld für eine Wellenleitermode exponentiell ins Medium n_2 hinein ab, während es in z-Richtung propagiert. So muss folgender Ansatz gelten

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{n}_{\mathrm{y}} \exp\left[\mathrm{i} k_0 n_{\text{eff}} z\right] \begin{cases} A \exp\left[\gamma_2 x\right] & x \leq -d/2 \quad , \\ \cos[k_{x_1} x] & -d/2 < x < d/2 \quad , \\ A \exp\left[-\gamma_2 x\right] & x \geq d/2 \quad , \end{cases} \tag{1}$$

wobei laut der Dispersionsrelation für die Propagationskonstanten gilt

$$k_{x_1} = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_{\text{eff}}^2} \quad , \tag{2}$$

$$\gamma_2 = k_0 \sqrt{n_{\text{eff}}^2 - n_2^2} \quad . \tag{3}$$

Um die Randbedingungen zu erfüllen, muss das tangentiale elektrische Feld an den Grenzflächen stetig sein und wir erhalten somit

$$A = \cos[k_{x_1} d/2] / \exp\left[-\gamma_2 d/2\right] \quad . \tag{4}$$

Wir betrachten nun den in der Ebene $z = 0$ abgeschnittenen Wellenleiter, wie in obiger Abbildung skizziert. In guter Näherung kann man annehmen, dass das Feld in der Austrittsebene dem Feld der Wellenleitermode entspricht. Diese kann durch folgende Gauss'sche Funktion approximiert werden

$$\mathbf{E}(x, y, z = 0) = E_0 \exp\left[-(k_{x_1}^2 + \gamma_2^2)\, x^2/2\right] \; \mathbf{n}_{\mathrm{y}} \,, \tag{5}$$

mit $k_{x_1} = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_{\text{eff}}^2}$ und $\gamma_2 = k_0 \sqrt{n_{\text{eff}}^2 - n_2^2}$.

(c) (8 Punkte) Berechnen Sie das Fernfeld $\mathbf{E}_\infty(x, y, z)$ des ausgekoppelten Lichts unter Verwendung der Parameter $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, k_0, E_0, k_{x_1} und γ_2.
Hinweis: Die Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left[-ax^2 - \mathrm{i}bx\right] = \sqrt{\pi/a} \exp\left[-b^2/(4a)\right]$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left[-\mathrm{i}bx\right] = 2\pi\, \delta(b)$ sollten hilfreich sein.
Für die y-Abhängigkeit finden Sie eine Deltafunktion $\delta(k_0 y/R)$, die experimentell nicht realistisch ist. Der Grund ist, dass in unserer Betrachtung das Feld in y-Richtung in der Austrittsebene unendlich ausgedehnt ist, was zur Folge hat, dass wir das Fernfeld nie erreichen können, das heisst, der Abstand zur Quelle kann nie viel grösser werden als die Grösse der Quelle. Da aber jede realistische Anordnung endlich ist, 'verschmiert' die Deltafunktion und das Fernfeld bleibt stets endlich.

Lösung:
Das Fernfeld ist gegeben durch die Fernfeld-Approximation des Feldwinkelspektrums

$$\mathbf{E}_\infty(x, y, z) \;=\; -2\pi \mathrm{i} \frac{k_0 z}{R} \; \hat{\mathbf{E}}(k_0 x/R,\, k_0 y/R;\, 0) \; \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i} k_0 R}}{R} \quad , \tag{6}$$

wobei $\hat{\mathbf{E}}$ die räumliche Fouriertransformation des Feldes $\mathbf{E}$ in der Austrittsebene $z = 0$ ist, sowie $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Die Fouriertransformation berechnet sich wie folgt

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_y(k_x, k_y;\, 0) &= \frac{E_0}{4\pi^2} \iint \mathrm{e}^{-(k_{x_1}^2 + \gamma_2^2)\, x^2/2}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,[k_x x + k_y y]}\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{E_0}{2\pi} \delta(k_y) \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i} k_x x - (k_{x_1}^2 + \gamma_2^2)\, x^2/2}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\ \delta(k_y)\ \frac{\exp\left[-(1/2) k_x^2/(k_{x_1}^2 + \gamma_2^2)\right]}{\sqrt{k_{x_1}^2 + \gamma_2^2}} \quad .
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Somit erhält man für das Fernfeld

$$
\mathbf{E}(x, y, z) \ = \ -\mathrm{i} E_0 \frac{\sqrt{2\pi}\, k_0 z}{\sqrt{k_{x_1}^2 + \gamma_2^2}}\ \delta(\frac{k_0 y}{R})\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, k_0 R}}{R^2}\ \exp\left[-\frac{(k_0 x/R)^2}{2(k_{x_1}^2 + \gamma_2^2)}\right] \mathbf{n}_y \quad . \tag{8}
$$

(d) (5 Punkte) Berechnen Sie die normierte Intensitätsverteilung $I(x, y = 0)/I_{\max}$ (normiert durch die Maximalintensität) im Fernfeld auf einem Schirm in grossem Abstand D vom Ende des Wellenleiters. Skizzieren Sie die normierte Intensitätsverteilung auf dem Schirm entlang der x-Achse. Beschriften Sie Ihre Achsen sinnvoll und geben Sie (unter Verwendung von D, n_1 und n_2) den Abstand von der optischen Achse an, bei dem die Intensität auf $1/e$ ihres Maximalwertes abgefallen ist.
Hinweis: Behandeln Sie in Ihrem Ausdruck für $I_{\max}$ auftretende δ-Funktionen symbolisch.

Lösung:

Im Vakuum gilt für die Intensität

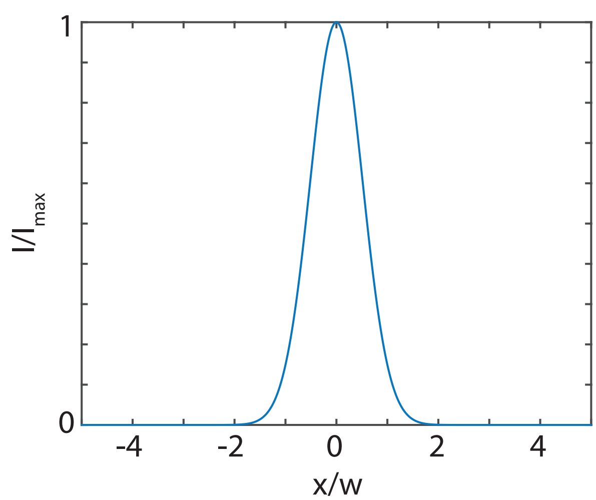
$$
I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, |E(\mathbf{r})|^2 \quad . \tag{9}
$$

Auf einem Schirm im Abstand R von der Austrittsebene gilt somit

$$
I(x, y = 0)/I_{\max} = \exp\left[-\frac{(k_0 x/D)^2}{k_{x_1}^2 + \gamma^2}\right] . \tag{10}
$$

Die Intensität ist auf $1/e$ Ihres Maximalwertes abgefallen bei

$$
w \ = \ D\sqrt{k_{x_1}^2 + \gamma_2^2}\, /\, k_0 \ = \ D\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad . \tag{11}
$$



(e) (3 Punkte) Bestimmen Sie die numerische Apertur des Wellenleiters als Funktion von n_1 und n_2.

Lösung:

Die numerische Apertur ist gegeben durch den Divergenzwinkel des aus dem Wellenleiter austretenden Intensitätsprofils

$$\mathrm{NA} \;=\; \sin\theta \;=\; \frac{w}{D} \;=\; \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad . \tag{12}$$

Wir kehren zurück zum in z-Richtung unendlich ausgedehnten Wellenleiter aus dem ersten Teil der Aufgabe. Es werden nun zwei Felder mit gleicher Amplitude aber mit leicht verschiedenen Frequenzen $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ und $\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$ in den Wellenleiter eingekoppelt. Dies resultiert in der Feldverteilung

$$\mathbf{E}(x=0,z,t) \;=\; \frac{E_0}{2}\left\{\sin[k_z(\omega_1)z - \omega_1 t] \;+\; \sin[k_z(\omega_2)z - \omega_2 t]\right\}\;\mathbf{n}_y. \tag{13}$$

Die Überlagerung der Teilfelder führt zu einer Schwebung. Die Dispersion $k_z(\omega) = k_0\, n_{\mathrm{eff}}(\omega)$ hat zur Folge, dass sich die Trägerwelle und ihre Einhüllende mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreiten. Wir entwickeln n_{eff} in eine Taylor Reihe um die Trägerfrequenz ω_0 und erhalten

$$n_{\mathrm{eff}}(\omega) \;\approx\; n_0 \;+\; (\omega - \omega_0)\dot{n}_{\omega_0}, \tag{14}$$

wobei $\dot{n}_{\omega_0} = \partial n_{\mathrm{eff}}/\partial\omega$ evaluiert bei $\omega = \omega_0$ ist.

(f) (4 Punkte) Schreiben Sie $\mathbf{E}(x=0,z,t)$ als Trägerwelle mit Frequenz ω_0 und einer Einhüllenden. *Hinweis:* Es gilt $\sin[x] + \sin[y] = 2\cos[(x-y)/2]\,\sin[(x+y)/2]$.

Lösung:

Trigonometrische Umformung und Einsetzen von ω_1 and ω_2 ergeben den Ausdruck

$$\begin{aligned} E_y(x=0,z,t) = \quad & \frac{E_0}{2}\left\{\sin\left[(n_0 + \Delta\omega\,\dot{n}_{\omega_0})k_0 z - (\omega_0 + \Delta\omega)t\right]\right. \\ & \left. + \sin\left[(n_0 - \Delta\omega\,\dot{n}_{\omega_0})k_0 z - (\omega_0 - \Delta\omega)t\right]\right\} \\ = \quad & E_0\;\cos[\Delta\omega\,\dot{n}_{\omega_0}k_0 z - \Delta\omega t]\;\sin[k_0 n_0 z - \omega_0 t]\;. \end{aligned} \tag{15}$$

(g) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit v_p und die Gruppengeschwindigkeit v_g des Feldes $E_y(z,t)$. Welche Bedingung muss gelten, damit sich die Einhüllende in negative z-Richtung ausbreitet?
Hinweis: Die Phasengeschwindigkeit v_p entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Trägerwelle und die Gruppengeschwindigkeit v_g der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Einhüllenden.

Lösung:

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Trägerwelle berechnet sich durch die Propagationsgeschwindigkeit Punkte fester Phase $k_0 n_0 z - \omega_0 t = \mathrm{const.}$ So ergibt sich $v_p = \dot{z} = \omega_0/(n_0 k_0) = c/n_0$. Für die Gruppengeschwindigkeit erhalten wir aus $\Delta\omega\;\dot{n}_{\omega_0}k_0 z - \Delta\omega\, t = \mathrm{const.}$ den Ausdruck $v_g = \Delta\omega/(\Delta\omega\,\dot{n}_{\omega_0}k_0) = 1/(\dot{n}_{\omega_0}k_0)$. Mit der Einsicht $k_0 = \partial k/\partial n|_{\omega_0}$ lässt sich zeigen $v_g = \partial\omega/\partial k$. Die Einhüllende läuft in negative z-Richtung, wenn gilt $\dot{n}_{\omega_0} < 0$ (anomale Dispersion) .

2 Güte eines Resonators (65 Pkt.)

Resonatoren sind "Käfige" für elektromagnetische Strahlung und im einfachsten Falle mit Dielektrikum gefüllte Volumina, die durch reflektierende Wände begrenzt werden. Die durch diese Wände geschaffenen Randbedingungen erlauben nur bestimmte Lösungen der Maxwell Gleichungen, die wir als Moden bezeichnen. Resonatoren sind unabdinglich als Frequenzstandards und Filter und finden weiterhin Verwendung in der Präzisionsmessung sowie zur Kontrolle der Wechselwirkung zwischen elektromagnetischer Strahlung und Materie. Das Mass für die spektrale Breite einer Resonatormode ist ihr Gütefaktor Q.

Wir betrachten hier den aus der Vorlesung bekannten quaderförmigen Resonator mit Seitenlängen L_x, L_y, L_z. Jede Mode ist in einem dreidimensionalen Resonator gekennzeichnet durch drei natürliche Zahlen n, m, l und das komplexe Feld im quaderförmigen Resonator bei der Frequenz ω ist (bei perfekt reflektierenden Wänden) von der Gestalt

$$\begin{aligned} E_x &= E_x^{(0)} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z), \\ E_y &= E_y^{(0)} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z), \\ E_z &= E_z^{(0)} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z), \end{aligned} \tag{16}$$

wobei die Wellenzahlen durch die Randbedingungen quantisiert sind, so dass gilt

$$k_i = n_i \frac{\pi}{L_i}, \qquad \text{mit } i = x, y, z, \text{ und } n_i \in \mathbb{N}_0, \tag{17}$$

und somit die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes auf den Wänden verschwindet. Die Amplituden $[E_x^{(0)}, E_y^{(0)}, E_z^{(0)}]^T = \mathbf{E}^{(0)}$ sind komplexe Konstanten. Für einen solchen idealen, völlig verlustfreien Resonator sind die Moden Dirac'sche δ-Funktionen im Frequenzraum und besitzen somit unendliche Güte. In der Realität zeigt jedoch jeder Resonator Verluste, die den Moden eine endliche Bandbreite verleihen. Diese Verluste können von Materialverlusten (endliche Leitfähigkeit der Wände oder des Dielektrikums) sowie von Strahlungsverlusten rühren. In dieser Aufgabe betrachten wir Ohm'sche Verluste eines Resonators, die ihren Ursprung in der endlichen Leitfähigkeit der Wände haben.

Wir wenden uns zunächst dem elektromagnetischen Energieinhalt des Resonators zu. Für ein Material mit dielektrischer Konstante $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und Permeabilität $\mu \in \mathbb{R}$ gilt für die elektromagnetische Energiedichte laut dem Poynting-Theorem

$$\mathcal{U} = \frac{1}{4} \left(\varepsilon\varepsilon_0 \left|\mathbf{E}\right|^2 + \mu\mu_0 \left|\mathbf{H}\right|^2 \right), \tag{18}$$

wobei der erste Term als elektrische Feldenergiedichte und der zweite als magnetische Feldenergiedichte interpretiert werden kann. Es lässt sich zeigen, dass die elektrische und die magnetische Feldenergie identisch sind.

(a) (2 Pkt.) Verwenden Sie eine Maxwell-Gleichung, um aus Gl. (16) die folgende Relation für die Feldamplituden zu zeigen

$$k_x E_x^{(0)} + k_y E_y^{(0)} + k_z E_z^{(0)} = 0. \tag{19}$$

Lösung:

Wir erhalten die gegebene Relation durch die Maxwell-Gleichung im quellfreien Raum $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

(b) (opt.) Bestimmen Sie die elektrische Feldenergie $\mathcal{E}_e$ im Resonator als Funktion der komplexen Amplituden $\mathbf{E}^{(0)}$. Zeigen Sie, dass die gesamte Feldenergie im Resonator lautet

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\frac{V}{8}\left|\mathbf{E}^{(0)}\right|^2. \tag{20}$$

Lösung:
Die elektrische Feldenergie ergibt sich aus dem Volumenintegral der elektrischen Feldenergiedichte über das Resonatorvolumen. Wir finden

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_e &= \int_V \mathrm{d}V\,\mathcal{U}_e = \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_0\int_V \mathrm{d}V\ \ |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_0\left[\left|E_x^{(0)}\right|^2\int_V \mathrm{d}V\ \cos^2(k_x x)\sin^2(k_y y)\sin^2(k_z z)\right. \\ &\qquad + \left|E_y^{(0)}\right|^2\int_V \mathrm{d}V\ \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\sin^2(k_z z) \\ &\qquad \left. + \left|E_z^{(0)}\right|^2\int_V \mathrm{d}V\ \sin^2(k_x x)\sin^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\right].\end{aligned} \tag{21}$$

Für die Integrale erhalten wir mit

$$\int_0^{L_{x_i}}\mathrm{d}x_i\ \sin^2\left(\frac{n\pi}{L_{x_i}}x_i\right) = \int_0^{L_{x_i}}\mathrm{d}x_i\ \cos^2\left(\frac{n\pi}{L_{x_i}}x_i\right) = \frac{L_{x_i}}{2} \tag{22}$$

jeweils $\frac{L_x L_y L_z}{8} = \frac{V}{8}$ und so finden wir für die elektrische Feldenergie im Resonator

$$\mathcal{E}_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{4}\frac{V}{8}\left|\mathbf{E}^{(0)}\right|^2. \tag{23}$$

Für die gesamte elektromagnetische Energie $\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = 2\mathcal{E}_e$ gilt mit Gl. (23)

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\frac{V}{8}\left|\mathbf{E}^{(0)}\right|^2. \tag{24}$$

In Aufgabe 2 der Übung 6 haben wir die Absorption elektromagnetischer Strahlung in Form einer ebenen Welle beim Eindringen in gute Leiter betrachtet. Wir haben gefunden, dass für die auf einer Fläche A absorbierte Leistung gilt

$$P = A\frac{\sigma\delta}{4}\left|\mathbf{E}_\|\right|^2, \tag{25}$$

wobei $\mathbf{E}_\|$ die Parallelkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche, σ die Leitfähigkeit des Spiegelmaterials und δ die Skin-Eindringtiefe bezeichnen. Das elektrische Feld im Leiter lautet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}n'(\mathrm{i}+1)z}, \tag{26}$$

mit dem (Realteil des) Brechungsindex $n' = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\varepsilon_0\omega}}$.

(c) (4 Pkt.) Berechnen Sie das magnetische Feld $\mathbf{H}_\|$ und sein Betragsquadrat (als Funktion von δ, σ und $|E|_\|$) im Leiter unter der Annahme, dass das elektrische Feld entlang der x-Richtung zeigt, so dass gilt $\mathbf{E}_\| = E_\|\,\mathbf{n}_x$.

Lösung:
Das magnetische Feld $\mathbf{H}_\parallel$ ergibt sich aus der Maxwell-Gleichung $\nabla\times\mathbf{E} = \mathrm{i}\omega\mu\mu_0\mathbf{H}$. Für ein x-polarisiertes elektrisches Feld erhalten wir

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{n'(\mathrm{i}+1)}{c\mu_0\mu} E_\parallel \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}n'(\mathrm{i}+1)z}\,\mathbf{n}_y. \tag{27}$$

Für das Betragsquadrat der magnetischen Feldamplitude ergibt sich so

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{H}_\parallel\right|^2 &= \left|\frac{n'(\mathrm{i}+1)}{c\mu_0\mu}\right|^2 \left|\mathbf{E}_\parallel\right|^2 &(28)\\ &= \frac{\sigma}{\omega\mu_0\mu}\left|\mathbf{E}_\parallel\right|^2 &(29)\\ &= \delta^2\frac{\sigma^2}{2}\left|\mathbf{E}_\parallel\right|^2. &(30)\end{aligned}$$

(d) (4 Pkt.) Drücken Sie die im Leiter absorbierte Leistung P durch die Magnetfeldamplitude $\mathbf{H}_\parallel$ an der Leiteroberfläche aus.

Lösung:
Wir können die absorbierte Leistung durch das Magnetfeld ausdrücken

$$P = \frac{A}{2\sigma\delta}\left|\mathbf{H}_\parallel\right|^2. \tag{31}$$

(e) (6 Pkt.) Unter der Annahme, dass das Magnetfeld auf einem guten Leiter gut beschrieben ist durch jenes auf einem perfekten Leiter, können wir dank der Stetigkeit der Parallelkomponente des Magnetfeldes an Grenzflächen die absorbierte Leistung durch die Felder an den Resonatorwänden beschreiben.
Berechnen Sie das magnetische Feld $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ im Resonator.

Lösung:
Das Magnetfeld ergibt sich aus der Maxwell-Gleichung $\nabla\times\mathbf{E} = \mathrm{i}\omega\mu\mu_0\mathbf{H}$ und lautet

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu\mu_0}\begin{pmatrix}\left(k_yE_z^{(0)} - k_zE_y^{(0)}\right)\sin(k_xx)\cos(k_yy)\cos(k_zz)\\ \left(k_zE_x^{(0)} - k_xE_z^{(0)}\right)\cos(k_xx)\sin(k_yy)\cos(k_zz)\\ \left(k_xE_y^{(0)} - k_yE_x^{(0)}\right)\cos(k_xx)\cos(k_yy)\sin(k_zz)\end{pmatrix}. \tag{32}$$

(f) (opt.) Zeigen Sie, dass die Ohm'sche Verlustleistung der Resonatormode n, m, l lautet

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{4\sigma\delta\omega^2\mu^2\mu_0^2}\Bigg\{&L_yL_zk^2\left|E_x^{(0)}\right|^2 + L_yL_z\frac{n^2\pi^2}{L_x^2}\left|\mathbf{E}_0\right|^2\\ &+L_xL_zk^2\left|E_y^{(0)}\right|^2 + L_xL_z\frac{m^2\pi^2}{L_y^2}\left|\mathbf{E}_0\right|^2\\ &+L_xL_yk^2\left|E_z^{(0)}\right|^2 + L_xL_y\frac{l^2\pi^2}{L_z^2}\left|\mathbf{E}_0\right|^2\Bigg\}.\end{aligned} \tag{33}$$

(g) (10 Pkt.) Betrachten Sie exemplarisch eine beliebige TE-Mode, für die per Definition gilt $E_z = 0$. Zeigen Sie, dass die Ohm'sche Verlustleistung proportional ist zur im Resonator gespeicherten Feldenergie laut

$$P_{\text{tot}} = \gamma\,\mathcal{E}. \tag{34}$$

Lösung:

Aus Gl. (19) folgt mit $E_z = 0$ die Relation $\left|E_x^{(0)}\right|^2 = \frac{k_y^2}{k_x^2}\left|E_y^{(0)}\right|^2$ und wir finden für die Feldenergie

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\frac{V}{8}\left|\mathbf{E}^{(0)}\right|^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\frac{V}{8}\left(1+\frac{k_x^2}{k_y^2}\right)\left|E_x^{(0)}\right|^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\frac{V}{8}\left(1+\frac{k_y^2}{k_x^2}\right)\left|E_y^{(0)}\right|^2, \tag{35}$$

sodass wir die Betragsquadrate der Feldamplituden durch die Feldenergie im Resonator ausdrücken können

$$\left|E_x^{(0)}\right|^2 = \frac{16\mathcal{E}}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\frac{k_y^2}{k_x^2+k_y^2}, \tag{36}$$

$$\left|E_y^{(0)}\right|^2 = \frac{16\mathcal{E}}{\varepsilon\varepsilon_0 V}\frac{k_x^2}{k_x^2+k_y^2}, \tag{37}$$

$$\left|\mathbf{E}^{(0)}\right|^2 = \frac{16\mathcal{E}}{\varepsilon\varepsilon_0 V}. \tag{38}$$

Für eine TE-Mode finden wir die Ohm'sche Verlustleistung

$$\begin{aligned} P_{\text{tot}} = \frac{1}{4\sigma\delta\omega^2\mu^2\mu_0^2}\Big\{ & L_yL_zk^2\left|E_x^{(0)}\right|^2 + L_yL_zk_x^2\left|\mathbf{E}_0\right|^2 \\ & + L_xL_zk^2\left|E_y^{(0)}\right|^2 + L_xL_zk_y^2\left|\mathbf{E}_0\right|^2 \\ & + L_xL_yk^2\left|E_z^{(0)}\right|^2 + L_xL_yk_z^2\left|\mathbf{E}_0\right|^2\Big\} \\ = \frac{\mathcal{E}}{\sigma\delta\mu\mu_0}\left\{\frac{m^2L_x+n^2L_y}{m^2L_x^2+n^2L_y^2} \right. & \left. + \frac{n^2L_y^3L_z^3+m^2L_x^3L_z^3+l^2L_x^3L_y^3}{n^2L_xL_y^3L_z^3+m^2L_x^3L_yL_z^3+l^2L_x^3L_y^3L_z}\right\}. \end{aligned} \tag{39}$$

(h) (6 Pkt.) Berechnen Sie die zeitabhängige Energie im Resonator $\mathcal{E}(t)$ mit dem Anfangswert $\mathcal{E}(t=0) = \mathcal{E}_0$ in Abhängigkeit von der Abklingkonstanten γ.

Lösung:

Die Ohm'sche Verlustleistung ist also proportional zur im Resonator gespeicherten Energie $\mathcal{E}$ und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -P_{\text{tot}} \tag{40}$$

und somit

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\mathcal{E}. \tag{41}$$

Die Energie im Resonator fällt also exponentiell ab mit der Abklingkonstanten γ und es gilt

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0\mathrm{e}^{-\gamma t}. \tag{42}$$

Wir interessieren uns nun für die spektrale Verteilung der Energiedichte $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}\omega}$ einer Resonatormode. Zu deren Bestimmung betrachten wir das zeitliche Abklingverhalten einer beliebigen verlustbehafteten Mode. Wir gehen davon aus, dass die Zeitsakala, auf der die Mode ausklingt, viel länger ist, als eine Oszillationsperiode des Feldes, so dass wir das Feld zu jedem Zeitpunkt in guter Näherung als monochromatisch annehmen können, jedoch mit einer zeitabhängigen komplexen Amplitude $\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{com}}(t)$. Wir definieren die zeitabhängige Energie im Resonator als

$$\mathcal{E}(t) = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{V}{8} \langle \mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{real}}(t) \cdot \mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{real}}(t) \rangle, \tag{43}$$

wobei die Zeitmittelung, dargestellt durch die spitzen Klammern, auf einer Zeitskala vergleichbar zur Periode der betrachteten Modenfrequenz zu erfolgen hat und $\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{real}}(t)$ die reelle elektrische Feldamplitude der Mode im Resonator bezeichne.

(i) (2 Pkt.) Zeigen Sie, dass Gl. (43) für ein strikt monochromatisches Feld auf Gl. (20) zurückführt.

Lösung:
Für ein monochromatisches Feld gilt

$$\langle \mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{real}}(t) \cdot \mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{real}}(t) \rangle = \frac{1}{4} \langle \left(\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{com}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathbf{E}^{(0)*}_{\mathrm{com}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t} \right)^2 \rangle = \frac{1}{2} \left| \mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{com}} \right|^2. \tag{44}$$

Für die zeitabhängige Energie im Resonator gilt dann

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \frac{V}{8} \left| \mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{com}}(t) \right|^2 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{V}{8} \langle \mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{real}}(t) \cdot \mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{real}}(t) \rangle = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{V}{8} \left| \mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{real}}(t) \right|^2, \tag{45}$$

wobei $\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{real}}(t)$ die reelle Modenamplitude im Resonator ist.

(j) (5 Pkt.) Für die Gesamtenergie der Mode vor dem exponentiellen Ausklingen, also die Energie zum Zeitpunkt $t = 0$, muss gelten

$$\mathcal{E}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\mathrm{tot}}(t) \mathrm{d}t. \tag{46}$$

Verwenden Sie das Parseval'sche Theorem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \ |E(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \ \left| \hat{E}(\omega) \right|^2 \tag{47}$$

um zu zeigen, dass für die Resonatorenergie gilt

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 V \gamma}{8\pi} \int_0^{\infty} \left| \hat{\mathbf{E}}^{(0)}(\omega) \right|^2 \mathrm{d}\omega. \tag{48}$$

Lösung:
Wir finden

$$\mathcal{E}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\mathrm{tot}}(t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \mathcal{E}(t) \mathrm{d}t = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{V}{8} \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{real}}(t) \right|^2 \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 V \gamma}{8\pi} \int_0^{\infty} \left| \hat{\mathbf{E}}^{(0)}(\omega) \right|^2 \mathrm{d}\omega. \tag{49}$$

Hierbei haben wir Parsevals Theorem verwendet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \ |E(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \ \left| \hat{E}(\omega) \right|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \ \left| \hat{E}(\omega) \right|^2, \tag{50}$$

sowie die Tatsache, dass für reelle Felder im Zeitraum das Betragsquadrat des Frequenzspektrums symmetrisch ist.

(k) (8 Pkt.) Berechnen Sie das Frequenzspektrum $\hat{\mathbf{E}}^{(0)}(\omega)$ der reellen Modenamplitude $\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{real}}(t)$ im Resonator unter der Annahme $\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{real}}(t<0)=0$.

Lösung:
Für die reelle Feldamplitude im Resonator muss gelten

$$\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{real}}(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{com}}(t=0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\right\}. \tag{51}$$

Wir haben die zeitabhängige komplexe Amplitude hier mit $\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{com}}(t)$ bezeichnet. Wir berechnen das Frequenzspektrum der ausklingenden Mode

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}}^{(0)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\;\theta(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{com}}(t=0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}t\;\left\{\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{com}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t} + \mathbf{E}^{(0)*}_{\mathrm{com}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0+\omega)t}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{com}}}{\gamma/2+\mathrm{i}(\omega_0-\omega)} + \frac{\mathbf{E}^{(0)*}_{\mathrm{com}}}{\gamma/2-\mathrm{i}(\omega_0+\omega)}\right\}.\end{aligned} \tag{52}$$

(l) (6 Pkt.) Berechnen Sie das Betragsquadrat des Spektrums $\left|\hat{\mathbf{E}}^{(0)}(\omega)\right|^2$ und überzeugen Sie sich, dass es sich im Fall $\gamma \ll \omega_0$ um eine Lorentzkurze um $\pm\omega_0$ handelt.

Lösung:
Für das Betragsquadrat finden wir für $\gamma \ll \omega_0$

$$\left|\hat{\mathbf{E}}^{(0)}(\omega)\right|^2 \approx \frac{\left|\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{com}}\right|^2}{4}\left\{\frac{1}{\gamma^2/4+(\omega_0-\omega)^2} + \frac{1}{\gamma^2/4+(\omega_0+\omega)^2}\right\}. \tag{53}$$

Hierbei haben wir die Kreuzterme des Produktes vernachlässigt, da die beiden Faktoren jeweils nur um $\pm\omega_0$ signifikant ungleich Null sind und ihr Überlapp für $\gamma \ll \omega_0$ darum verschwindet.

(m) (4 Pkt.) Formulieren Sie die spektrale Energiedichte $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_0}{\mathrm{d}\omega}$.

Lösung:
Es ergibt sich für die (einseitige) spektrale Energiedichte

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_0}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 V\gamma}{8\pi}\frac{\left|\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{com}}\right|^2}{4}\,\frac{1}{\gamma^2/4+(\omega_0-\omega)^2}. \tag{54}$$

(n) (4 Pkt.) Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit Ihres Ergebnisses aus der vorherigen Teilaufgabe, indem Sie bestätigen, dass das Integral über die von Ihnen berechnete spektrale Energiedichte die Gesamtenergie der Mode ergibt, sodass gilt

$$\mathcal{E}_0 = \int \mathrm{d}\omega\;\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_0}{\mathrm{d}\omega}. \tag{55}$$

Hinweis: Es gilt für die Lorentzfunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\;\frac{1}{a^2+(\omega_0-\omega)^2} = \frac{\pi}{a}, \tag{56}$$

Lösung:
Es gilt

$$\int \mathrm{d}\omega \, \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_0}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 V}{2} \frac{\left|\mathbf{E}^{(0)}_{\mathrm{com}}\right|^2}{8} = \mathcal{E}_0. \tag{57}$$

(o) (4 Pkt.) Der Gütefaktor Q kann interpretiert werden als Anzahl der Schwingungen des Feldes im Resonator (multipliziert mit 2π), bevor sein Energieinhalt auf $1/e$ seines Anfangswertes abgefallen ist. Berechnen Sie den Gütefaktor einer Resonatormode bei Frequenz ω_0 und Dämpfungsrate γ.

Lösung:
Die Feldintensität ist nach der Zeit $1/\gamma$ auf $1/e$ ihres Anfangswertes abgefallen. In dieser Zeit führt das Feld

$$Q = \omega/\gamma \tag{58}$$

Schwingungen aus.