

Übung 10

Abgabe: 14.05. bzw. 17.05

Dipolstrahlung und Antennen II

1 Abstrahlung einer Dipolschleife (45 Pkt.)

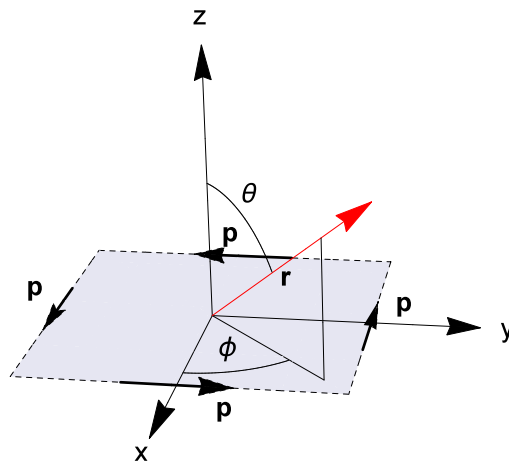


Abbildung 1: Anordnung von vier Dipolen entlang den Seiten eines Quadrates in der xy-Ebene. Der Abstand zwischen zwei gegenüberliegenden Dipolen sei $2d$.

Wir betrachten die in Abb. 1 dargestellte Anordnung von vier zeitharmonischen Dipolen (Kreisfrequenz ω) mit Dipolmoment $|\mathbf{p}|$, die sich an den Seiten eines Quadrates mit Seitenlänge $2d$ in der xy-Ebene befinden. Die Phasen der Dipole seien wie in der Abbildung dargestellt. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Abstrahlcharakteristik dieser Dipolschleife in einem Medium mit Materialkonstanten ϵ, μ abzuleiten und zu interpretieren.

- (a) (5 Pkt.) Berechnen Sie zunächst mit Hilfe der Green'schen Funktion das elektrische Fernfeld $\mathbf{E}_\infty(\mathbf{r}) = [E_x, E_y, E_z]^T$ eines einzelnen Dipols $\mathbf{p} = p\mathbf{n}_y$, der sich am Ursprung $\mathbf{r}' = (0, 0, 0)$ befindet.

Hinweis: Die Green'sche Funktion setzt sich aus Nahfeld, Zwischenfeld sowie Fernfeld-Komponenten zusammen. Berücksichtigen Sie hier nur die Fernfeld-Komponente $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_\infty(\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}')$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right]. \quad (1)$$

Lösung:

Das Fernfeld \mathbf{E}_∞ lässt sich mit Hilfe der Green'schen Funktion berechnen

$$\mathbf{E}_\infty(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu_0 \mu \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{p}. \quad (2)$$

Für einen Dipol $\mathbf{p} = p \mathbf{n}_y$ erhalten wir

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \mathbf{p} = p \mathbf{n}_y, \quad (3)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{R}\mathbf{p} = (xy \mathbf{n}_x + y^2 \mathbf{n}_y + yz \mathbf{n}_z) p \quad (4)$$

und somit für das Fernfeld

$$\mathbf{E}_\infty(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu_0 \mu \begin{bmatrix} -xy/r^2 \\ 1 - y^2/r^2 \\ -yz/r^2 \end{bmatrix} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} p. \quad (5)$$

- (b) (4 Pkt.) Wir ermitteln nun aus dem in Teilaufgabe (a) ermittelten Fernfeld eines Dipols am Ursprung das Fernfeld des Dipols in der Dipolschleife bei $\mathbf{r}' = (-d, 0, 0)$ mit Dipolmoment $\mathbf{p} = -p \mathbf{n}_y$. Hierzu verwenden wir die Fraunhofer-Näherung. In dieser Näherung vernachlässigen wir die Amplitudenänderung am Beobachtungspunkt durch die kleine Verschiebung der Quelle vom Ursprung zu $\mathbf{r}' = (-d, 0, 0)$ und betrachten lediglich den Einfluss auf den Phasenterm. Zeigen Sie, dass für grosse Abstände $r \gg r'$ gilt

$$e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx e^{ik(r-\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/r)}. \quad (6)$$

Lösung:

Für die Phasenänderung erhalten wir mit $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \approx r \sqrt{1 - \frac{2}{r^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \approx r(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2})$

$$e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx e^{ik(r-\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/r)} \quad (7)$$

- (c) (4 Pkt.) Leiten Sie her, dass in der Fraunhofer-Näherung für das Fernfeld des Dipols in der Dipolschleife bei $\mathbf{r}' = (-d, 0, 0)$ mit Dipolmoment $\mathbf{p} = -p \mathbf{n}_y$ gilt

$$\mathbf{E}_\infty^{(1)}(\mathbf{r}) = -\omega^2 \mu_0 \mu \begin{bmatrix} -xy/r^2 \\ 1 - y^2/r^2 \\ -yz/r^2 \end{bmatrix} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} p e^{ikxd/r}. \quad (8)$$

Lösung:

Es gilt in unserem Fall $e^{ik(r-\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/r)} = e^{ik(r+xd/r)}$. Da in der Fraunhofer-Näherung die Amplitudenänderung vernachlässigbar ist, finden wir für das Fernfeld

$$\mathbf{E}_\infty^{(1)}(\mathbf{r}) = -\omega^2 \mu_0 \mu \begin{bmatrix} -xy/r^2 \\ 1 - y^2/r^2 \\ -yz/r^2 \end{bmatrix} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} p e^{ikxd/r}. \quad (9)$$

- (d) (optional) Demonstrieren Sie, dass das Fernfeld $\mathbf{E}_\infty^{(2)}(\mathbf{r})$ des gegenüberliegenden, gegenphasigen Dipols $\mathbf{p} = p\mathbf{n}_y$ bei $\mathbf{r}' = (d, 0, 0)$ lautet

$$\mathbf{E}_\infty^{(2)}(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu_0 \mu \begin{bmatrix} -xy/r^2 \\ 1 - y^2/r^2 \\ -yz/r^2 \end{bmatrix} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} p e^{-ikxd/r}. \quad (10)$$

Lösung:

Durch die Ersetzungen $d \rightarrow -d$ und $p \rightarrow -p$ in Gl. 9 erhalten wir den angegebenen Ausdruck.

- (e) (4 Pkt.) Berechnen Sie das gemeinsame Fernfeld $\mathbf{E}_\infty^{(1,2)}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\infty^{(1)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_\infty^{(2)}(\mathbf{r})$ der beiden Dipole.

Lösung:

Das gemeinsame Fernfeld erhalten wir durch lineare Superposition der Einzelfelder

$$\mathbf{E}_\infty^{(1,2)}(\mathbf{r}) = -2ip\omega^2 \mu_0 \mu \begin{bmatrix} -xy/r^2 \\ 1 - y^2/r^2 \\ -yz/r^2 \end{bmatrix} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin\left(kd\frac{x}{r}\right). \quad (11)$$

- (f) (5 Pkt.) Wir betrachten nun die beiden verbleibenden Dipole $\mathbf{p} = p\mathbf{n}_x$ bei $\mathbf{r}' = (0, -d, 0)$ sowie $\mathbf{p} = -p\mathbf{n}_x$ bei $\mathbf{r}' = (0, d, 0)$. Berechnen Sie deren gemeinsames Fernfeld $\mathbf{E}_\infty^{(3,4)}(\mathbf{r})$.

Lösung:

Evaluation der Green'schen Funktion für das Fernfeld für einen Dipol in x-Richtung sowie Anwendung der Fraunhofer-Näherung ergibt analog zur Betrachtung der Dipole entlang der y-Richtung

$$\mathbf{E}_\infty^{(3,4)}(\mathbf{r}) = 2ip\omega^2 \mu_0 \mu \begin{bmatrix} 1 - x^2/r^2 \\ -xy/r^2 \\ -xz/r^2 \end{bmatrix} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin\left(kd\frac{y}{r}\right). \quad (12)$$

- (g) (4 Pkt.) Das gesamte Fernfeld $\mathbf{E}_\infty(\mathbf{r})$ der Dipolschleife ergibt sich aus der Summe der Fernfelder der einzelnen Dipole. Der Abstand d sei viel kleiner als die Wellenlänge λ . Zeigen Sie, dass in diesem Limit für das gemeinsame Fernfeld der vier Dipole gilt

$$\mathbf{E}_\infty(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\infty^{(1,2)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_\infty^{(3,4)}(\mathbf{r}) = 2ip\omega^2 \mu_0 \mu kd \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \begin{bmatrix} y/r \\ -x/r \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Lösung:

Im Limit $kd \ll 1$ gilt die Näherung

$$\sin\left(kd\frac{x}{r}\right) \approx kd\frac{x}{r} \quad \text{sowie} \quad \sin\left(kd\frac{y}{r}\right) \approx kd\frac{y}{r}. \quad (14)$$

Das gemeinsame Fernfeld ergibt sich dann zu

$$\mathbf{E}_\infty(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\infty^{(1,2)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_\infty^{(3,4)}(\mathbf{r}) = 2ip\omega^2 \mu_0 \mu kd \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \begin{bmatrix} y/r \\ -x/r \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

- (h) (6 Pkt.) Führen Sie nun eine Koordinatentransformation von kartesischen zu sphärischen Koordinaten mit $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ durch. Geben Sie die sphärischen Vektorkomponenten $\mathbf{E}_\infty(\mathbf{r}) = [E_r, E_\theta, E_\phi]^T$ des gemeinsamen Fernfeldes an.

Hinweis: Es gilt folgender Zusammenhang zwischen kartesischen und sphärischen Einheitsvektoren

$$\mathbf{n}_x = \sin \theta \cos \phi \mathbf{n}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{n}_\theta - \sin \phi \mathbf{n}_\phi \quad (16a)$$

$$\mathbf{n}_y = \sin \theta \sin \phi \mathbf{n}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{n}_\theta + \cos \phi \mathbf{n}_\phi \quad (16b)$$

$$\mathbf{n}_z = \cos \theta \mathbf{n}_r - \sin \theta \mathbf{n}_\theta. \quad (16c)$$

Lösung:

In sphärischen Koordinaten gilt $x = r \sin \theta \cos \phi$ sowie $y = r \sin \theta \sin \phi$ und darum

$$\mathbf{E}_\infty(\mathbf{r}) = 2ip\omega^2 \mu_0 \mu k d \frac{e^{ikr}}{4\pi r} [\sin \theta \sin \phi \mathbf{n}_x - \sin \theta \cos \phi \mathbf{n}_y]. \quad (17)$$

Die sphärischen Vektorkomponenten ergeben sich mit den angegebenen Relationen für die Einheitsvektoren

$$E_\phi = -E_x \sin \phi + E_y \cos \phi = -2ip\omega^2 \mu_0 \mu k d \sin \theta \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (18a)$$

$$E_\theta = E_x \cos \phi \cos \theta + E_y \sin \phi \cos \theta - E_z \sin \theta = 0 \quad (18b)$$

$$E_r = E_x \cos \phi \sin \theta + E_y \sin \phi \sin \theta + E_z \cos \theta = 0. \quad (18c)$$

- (i) (2 Pkt.) Vergleichen Sie das Fernfeld der Dipolschleife mit dem Fernfeld eines magnetischen Dipols, das Sie in Übung 9 bereits kennengelernt haben. Zeigen Sie, dass die Fernfelder äquivalent sind für die Relation $\mathbf{m} = -2i\omega d\mathbf{p}$ zwischen magnetischem und elektrischem Dipolmoment. Geben Sie eine intuitive Erklärung für die Tatsache, dass das Fernfeld der Schleife aus vier elektrischen Dipolen gerade dem Fernfeld eines magnetischen Dipols gleicht. In welche Richtung zeigt der äquivalente magnetische Dipol der Dipolschleife?

Hinweis: Das Feld eines magnetischen Dipols, gelegen am Ursprung und entlang der z-Richtung zeigend, lautet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -Zm \sin \theta \frac{e^{ikr}}{4\pi r} k^2 \left(-\frac{\mathbf{i}}{kr} - 1 \right) \mathbf{n}_\phi. \quad (19)$$

Lösung:

Der Vergleich von Gl. (18a) mit dem Fernfeldterm aus Gl. (19) zeigt unter Benutzung von $k = n\frac{\omega}{c}$ mit $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ und $Z = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}$ die Relation $m = -2i\omega d\mathbf{p}$. Beide Dipole, elektrisch und magnetisch, zeigen in z-Richtung. Das Ergebnis leuchtet ein, denn die betrachteten elektrischen Dipole formen in erster Näherung eine Leiterschleife. Nach dem Induktionsgesetz wird in einer stromdurchflossenen Leiterschleife ein Magnetfeld senkrecht zur Schleife induziert. Der äquivalente magnetische Dipol zeigt also in z-Richtung, senkrecht zur Schleife (s. auch Übung 7). Wir können auch die Faktoren $-i\omega$ in der Relation $m = -2i\omega d\mathbf{p}$ verstehen. Das magnetische Dipolmoment einer Leiterschleife, durchflossen von einem Strom I , lautet $m = AI$, mit A der eingeschlossenen Fläche. Zwischen Stromdichte $\mathbf{j} \propto -i\omega \mathbf{p} = \dot{\mathbf{p}}$ und Dipolmoment steht ein Faktor $-i\omega$, der gerade in der Relation $m = -2i\omega d\mathbf{p}$ erscheint.

- (j) (3 Pkt.) Berechnen Sie das magnetische Fernfeld $\mathbf{H}_\infty(\mathbf{r})$ der Dipolschleife aus Gl. (19).
Hinweis: Die Tatsache, dass die Fernfelder transversal sind, kann hilfreich sein.

Lösung:

Der Fernfeldterm aus Gl. (19) lautet $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Zm \sin \theta \frac{e^{ikr}}{4\pi r} k^2 \mathbf{n}_\phi$. Das magnetische Fernfeld erhalten wir für transversale Felder aus der Relation $\mathbf{H} = Z^{-1}(\mathbf{n}_k \times \mathbf{E})$, die direkt aus dem Induktionsgesetz folgt

$$\mathbf{H}_\infty(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z} E_\phi (\mathbf{n}_r \times \mathbf{n}_\phi) = -\frac{1}{Z} E_\phi \mathbf{n}_\theta. \quad (20)$$

- (k) (3 Pkt.) Ermitteln Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor $\langle \mathbf{S} \rangle$ für die Dipolschleife mit effektivem magnetischem Dipolmoment m .

Lösung:

Für den zeitgemittelten Poyntingvektor erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_\infty \times \mathbf{H}_\infty^* \} = -\frac{1}{2Z} \{ E_\phi \mathbf{n}_\phi \times E_\phi^* \mathbf{n}_\theta \} \\ &= \frac{Zk^4}{32\pi^2 r^2} m^2 \sin^2 \theta \mathbf{n}_r \end{aligned} \quad (21)$$

- (l) (5 Pkt.) Zeigen Sie durch Integration des Poyntingvektors über die Obefläche einer Kugel um den Ursprung, dass die gesamte abgestrahlte Leistung P_0 der Dipolschleife lautet

$$P = \mu_0 \mu \frac{k^3 \omega}{12\pi} m^2. \quad (22)$$

Wie skaliert P_0 mit der Grösse der Schleife?

Lösung:

Die gesamte abgestrahlte Leistung beträgt:

$$\begin{aligned} P_0 &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{n}_r r^2 \sin \theta \\ &= Z \frac{k^4}{32\pi^2} m^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta d\phi}_{\frac{4}{3} \cdot 2\pi} \\ &= Z \frac{k^4}{12\pi} m^2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$= \mu_0 \mu \frac{k^3 \omega}{12\pi} m^2 \quad (24)$$

Da $m \propto d$ gilt, skaliert die abgestrahlte Leistung mit $P_0 \propto d^2$, ist also direkt proportional zur Fläche der Dipolschleife.

2 Magnetischer Dipol (55 Pkt.)

In der ersten Aufgabe haben wir uns mit einer Anordnung elektrischer Dipole befasst, die in der Ferne von einem magnetischen Dipol nicht zu unterscheiden ist. Nun wenden wir uns in dieser Aufgabe eben jener zweiten elementaren Strahlungsquelle zu, dem magnetischen Dipol. Wir betrachten dazu eine kreisförmige Leiterschleife um den Ursprung mit Radius a in der xy -Ebene in einem homogenen Medium mit Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, wie in Abb. 2 dargestellt. In der Leiterschleife fliesse ein zeitharmonischer Strom I bei der Frequenz ω . Der Querschnitt des Leiters sei infinitesimal dünn, so dass sich die komplexe Stromdichte in zylindrischen Koordinaten schreiben lässt als

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I \delta(r - a) \delta(z) \mathbf{n}_\phi. \quad (25)$$

Im Folgenden leiten wir das Strahlungsfeld der Leiterschleife her im Limit, dass der Radius der Leiterschleife viel kleiner sei als der Abstand des Beobachters vom Ursprung.

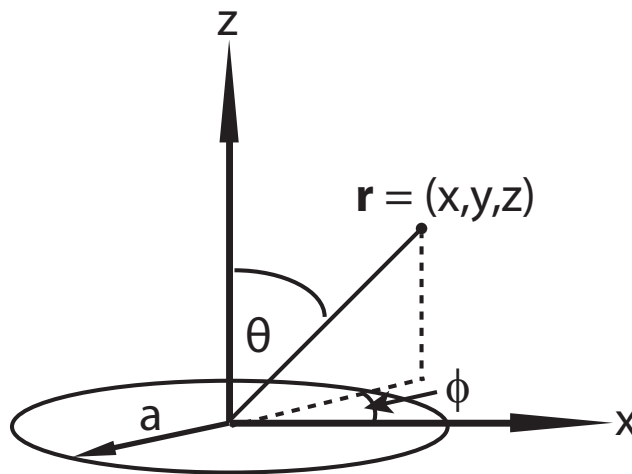


Abbildung 2: Skizze der infinitesimal dünnen Leiterschleife mit Radius a in der xy -Ebene mit Beobachtungspunkt \mathbf{r} in sphärischen Koordinaten.

- (a) (2 Pkt.) Wie lautet die reelle zeitabhängige Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$?

Lösung:

Die zeitabhängige Stromdichte lautet $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{j}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$.

- (b) (optional) Zeigen Sie, dass die komplexe Stromdichte in Gl. (25) in Kugelkoordinaten lautet

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{I}{r} \delta(r - a) \delta(\theta - \frac{\pi}{2}) \mathbf{n}_\phi. \quad (26)$$

Hinweis: Das Integral der Stromdichte über den Leiterquerschnitt muss gerade den Strom ergeben.

Lösung:

Das Flächenintegral über den Querschnitt der Schleife muss gerade den Strom I ergeben.

Wir können uns von dieser Tatsache anhand der Darstellung der Stromdichte in Zylinderkoordinaten überzeugen, denn es gilt

$$\int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dz \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_\phi = \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dz I \delta(r-a) \delta(z) = I. \quad (27)$$

In sphärischen Koordinaten finden wir mit dem infinitesimalen Flächenelement $dA = r dr d\theta$

$$\int_0^\infty r dr \int_0^\pi d\theta \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_\phi = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta I \delta(r-a) \delta(\theta - \frac{\pi}{2}) = I. \quad (28)$$

Wir widmen uns nun der Berechnung des räumlichen Vektorpotentials

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mu \int_V \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \exp[ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (29)$$

aus dem wir schliesslich das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ und daraus das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ berechnen können. Das Integrationsvolumen V schliesse die Leiterschleife komplett ein.

- (c) (12 Pkt.) Berechnen Sie zunächst den Ausdruck $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ in den sphärischen Koordinaten r, θ, ϕ und r', θ', ϕ' . Berücksichtigen Sie dabei, welche Werte \mathbf{r}' annehmen kann.

Hinweis: Schreiben Sie die Ortsvektoren in der Form $\mathbf{r} = A\mathbf{n}_x + B\mathbf{n}_y + C\mathbf{n}_z$.

Lösung:

Wir schreiben die Punkte \mathbf{r} und \mathbf{r}' in sphärischen Koordinaten und verwenden $r' = a$ sowie $\theta' = \pi/2$ und erhalten

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \phi \mathbf{n}_x + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{n}_y + r \cos \theta \mathbf{n}_z, \quad (30)$$

$$\mathbf{r}' = a \cos \phi' \mathbf{n}_x + a \sin \phi' \mathbf{n}_y. \quad (31)$$

Nun berechnen wir den Betrag

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= |(r \sin \theta \cos \phi - a \cos \phi') \mathbf{n}_x + (r \sin \theta \sin \phi - a \sin \phi') \mathbf{n}_y + r \cos \theta \mathbf{n}_z| \\ &= [r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi' - 2ar \sin \theta \cos \phi \cos \phi' \\ &\quad + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi' - 2ar \sin \theta \sin \phi \sin \phi' \\ &\quad + r^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \\ &= r[\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta \\ &\quad + \left(\frac{a}{r}\right)^2 (\cos^2 \phi' + \sin^2 \phi') \\ &\quad - \frac{2a}{r} \sin \theta (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi')]^{1/2} \\ &= r \sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2 \left(\frac{a}{r}\right) \sin \theta \cos(\phi - \phi')}. \end{aligned} \quad (32)$$

Im letzten Schritt haben wir die Identität $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$ verwendet.

- (d) (optional) Entwickeln Sie den Integranden des Vektorpotentials in Gl. (29) im Grenzfall $a \ll r$. Zeigen Sie dazu, dass in erster Ordnung bezüglich a/r gilt

$$\frac{\exp[ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{\exp[ikr]}{4\pi r} \left[1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos(\phi - \phi') (1 - ikr) \right]. \quad (33)$$

Hinweis: Die Identität $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$ kann hilfreich sein.

Lösung:

In erster Ordnung in a/r finden wir

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r \left(1 - \frac{a}{r} \sin \theta \cos(\phi - \phi')\right), \quad (34)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos(\phi - \phi')\right), \quad (35)$$

sowie

$$\begin{aligned} \exp[ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|] &\approx \exp[ikr] \exp[-ika \sin \theta \cos(\phi - \phi')] \\ &\approx \exp[ikr] (1 - ika \sin \theta \cos(\phi - \phi')). \end{aligned} \quad (36)$$

Schliesslich erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\exp[ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &\approx \frac{\exp[ikr]}{4\pi r} \left[1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos(\phi - \phi')\right] [1 - ika \sin \theta \cos(\phi - \phi')] \\ &= \frac{\exp[ikr]}{4\pi r} \left[1 - ika \sin \theta \cos(\phi - \phi') + \frac{a}{r} \sin \theta \cos(\phi - \phi') + \mathcal{O}(a^2)\right] \\ &= \frac{\exp[ikr]}{4\pi r} \left[1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos(\phi - \phi') (1 - ikr)\right]. \end{aligned} \quad (37)$$

(e) (12 Pkt.) Verwenden Sie Ihre Resultate aus den Teilaufgaben (b) und (d) um zu zeigen, dass das Vektorpotential lautet

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mu a^2 I}{4r^2} \exp[ikr] (1 - ikr) \sin \theta \mathbf{n}_\phi. \quad (38)$$

Hinweis: Der Einheitsvektor in azimuthaler Richtung lautet als Superposition kartesischer Einheitsvektoren $\mathbf{n}_\phi = -\sin \phi \mathbf{n}_x + \cos \phi \mathbf{n}_y$. Achten Sie genau darauf, über welche Koordinaten integriert wird. Die Integrale $\int_0^{2\pi} d\alpha \sin \alpha \cos \alpha = 0$, sowie $\int_0^{2\pi} d\alpha \sin^2 \alpha = \int_0^{2\pi} d\alpha \cos^2 \alpha = \pi$ mögen hilfreich sein.

Lösung:

Wir setzen die Stromdichte in sphärischen Koordinaten aus Gl. (26) sowie die Näherung aus Gl. (33) in den Ausdruck für das Vektorpotential in Gl. (29) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \mu \int_0^\infty dr' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\theta' r'^2 \sin \theta' \frac{I}{r'} \delta(r' - a) \delta(\theta' - \frac{\pi}{2}) (-\sin \phi' \mathbf{n}_x + \cos \phi' \mathbf{n}_y) \\ &\quad \cdot \frac{\exp[ikr]}{4\pi r} \left[1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos(\phi - \phi') (1 - ikr)\right] \\ &= \mu_0 \mu a I \int_0^{2\pi} d\phi' (-\sin \phi' \mathbf{n}_x + \cos \phi' \mathbf{n}_y) \frac{\exp[ikr]}{4\pi r} \left[1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos(\phi - \phi') (1 - ikr)\right] \\ &= \frac{\mu_0 \mu a^2 I}{4\pi r^2} \exp[ikr] (1 - ikr) \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi' \cos(\phi - \phi') (-\sin \phi' \mathbf{n}_x + \cos \phi' \mathbf{n}_y). \end{aligned} \quad (39)$$

Im ersten Schritt haben wir hierbei die δ -Funktionen ausgewertet, im zweiten Schritt haben wir verwendet, dass das Integral über eine volle Periode des \sin bzw. \cos verschwindet. Wir wenden uns dem verbleibenden Integral zu und verwenden erneut die Relation $\cos \alpha \cos \beta +$

$\sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$ und finden so

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi') (-\sin \phi' \mathbf{n}_x + \cos \phi' \mathbf{n}_y) d\phi' \\
 &= \left[-\cos \phi \int_0^{2\pi} \sin \phi' \cos \phi' d\phi' - \sin \phi \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi' d\phi' \right] \mathbf{n}_x \\
 &+ \left[\cos \phi \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi' d\phi' + \sin \phi \int_0^{2\pi} \sin \phi' \cos \phi' d\phi' \right] \mathbf{n}_y \\
 &= \pi (-\sin \phi \mathbf{n}_x + \cos \phi \mathbf{n}_y) \\
 &= \pi \mathbf{n}_\phi,
 \end{aligned} \tag{40}$$

denn es gilt $\int_0^{2\pi} d\alpha \sin \alpha \cos \alpha = 0$, sowie $\int_0^{2\pi} d\alpha \sin^2 \alpha = \int_0^{2\pi} d\alpha \cos^2 \alpha = \pi$.
Somit ergibt sich das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mu a^2 I}{4r^2} \exp[ikr] (1 - ikr) \sin \theta \mathbf{n}_\phi. \tag{41}$$

- (f) (9 Pkt.) Berechnen Sie aus dem Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ das magnetische Feld $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ des strahlenden magnetischen Dipols.

Lösung:

Es gilt $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ und mit $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r})$ finden wir

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\mu_0 \mu} [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})] \\
 &= \frac{a^2 I}{4} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\exp[ikr]}{r^2} (1 - ikr) \sin^2 \theta \right) \mathbf{n}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\exp[ikr]}{r} (1 - ikr) \sin \theta \right) \mathbf{n}_\theta \right] \\
 &= \frac{a^2 I}{4r^3} \exp[ikr] [2(1 - ikr) \cos \theta \mathbf{n}_r - \sin \theta (-1 + ikr + k^2 r^2) \mathbf{n}_\theta].
 \end{aligned} \tag{42}$$

- (g) (9 Pkt.) Bestimmen Sie nun mithilfe einer Maxwell-Gleichung das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ des magnetischen Dipols aus seinem magnetischen Feld $\mathbf{H}(\mathbf{r})$.

Lösung:

Wir erhalten das elektrische Feld aus der Maxwell Gleichung $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})$ und finden so

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{i\omega \epsilon \epsilon_0} \frac{1}{r} [\partial_r (r H_\theta) - \partial_\theta H_r] \mathbf{n}_\phi \\
 &= -\frac{1}{i\omega \epsilon \epsilon_0} \frac{a^2 I}{4r^3} e^{ikr} \sin \theta \left(2ik + k^2 r - ik^3 r^2 - \frac{2}{r} + \frac{2}{r} - 2ik \right) \mathbf{n}_\phi \\
 &= -\frac{a^2 I \sin \theta e^{ikr}}{4\epsilon \epsilon_0} \frac{k^2}{r} \left(-\frac{i}{kr} - 1 \right) \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \mathbf{n}_\phi,
 \end{aligned} \tag{43}$$

wobei wir im letzten Schritt $k = n\omega/c$ sowie $n^2 = \epsilon\mu$ und $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$ verwendet haben.

- (h) (11 Pkt.) Um die Relation zwischen den Feldern des elektrischen und des magnetischen Dipols zu bestimmen, führen wir das magnetische Dipolmoment $m = AI$ ein, wobei A die

von der Leiterschleife eingeschlossene Fläche sei. Zeigen Sie, dass sich die magnetischen Feldkomponenten des magnetischen Dipols H_i^m (mit $i = r, \theta$) aus den elektrischen Feldern des elektrischen Dipols E_i^e ergeben laut

$$H_i^m = E_i^e \frac{m}{p} \frac{1}{c_{\text{med}} Z}, \quad (44)$$

während sich das elektrische Feld des magnetischen Dipols E_ϕ^m aus dem magnetischen Feld des elektrischen Dipols H_ϕ^e berechnen lässt nach

$$E_\phi^m = -H_\phi^e \frac{m}{p} \frac{Z}{c_{\text{med}}}, \quad (45)$$

wobei wir mit c_{med} die Lichtgeschwindigkeit im Medium und mit Z seine Wellenimpedanz bezeichnet haben.

Hinweis: Die Felder des elektrischen Dipols sind Ihnen aus der Vorlesung bekannt.

Lösung:

Mit $m = AI = a^2 \pi I$ lautet unser Ergebnis aus der vorhergehenden Aufgabe

$$\begin{aligned} H_r^m &= \frac{a^2 I}{4r^3} e^{ikr} (2 - 2ikr) \cos \theta \\ &= \frac{m \cos \theta}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} k^2 \left[\frac{2}{k^2 r^2} - \frac{2i}{kr} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

sowie

$$H_\theta^m = \frac{m \sin \theta}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} k^2 \left[\frac{1}{k^2 r^2} - \frac{i}{kr} - 1 \right]. \quad (47)$$

Weiterhin gilt

$$\frac{1}{c_{\text{med}} Z_{\text{med}}} = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} = \varepsilon_0 \varepsilon, \quad (48)$$

womit durch Vergleich mit den elektrischen Dipolfeldern die Relationen in Gl. (44) gezeigt wären. Aus der Gleichung

$$\frac{Z_{\text{med}}}{c_{\text{med}}} = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = \mu_0 \mu \quad (49)$$

folgt zusammen mit dem Ergebnis für E_ϕ^m aus Gl. (43) sowie H_ϕ^e die Relation in Gl. (45). Hierbei haben wir das Magnetfeld des elektrischen Dipols verwendet

$$H_r = H_\theta = 0, \quad (50)$$

$$H_\phi = \frac{1}{Z} \frac{p \sin \theta}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} k^2 \left[-\frac{i}{kr} - 1 \right]. \quad (51)$$