

# Übung 9

Abgabe: 07.05. bzw. 10.05.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen  
Frühjahrssemester 2019  
Photonics Laboratory, ETH Zürich  
www.photonics.ethz.ch

## Dipolstrahlung, Antennen

Der zeitharmonisch oszillierende elektrische Dipol stellt die einfachste Quelle elektromagnetischer Strahlung dar. An seiner Seite steht der strahlende magnetische Dipol, die zweite elementare, punktförmige Strahlungsquelle. Durch Superposition der Felder von Dipolen können Richtcharakteristiken erzeugt werden, die die generierte elektromagnetische Strahlung in die gewünschte Richtung senden und die insgesamt abgestrahlte Leistung bestimmen. In dieser Übung veranschaulichen wir uns einige Grundlagen der Antennentheorie unter Verwendung der beiden elementaren Dipole.

### 1 Polarisierbares Partikel als resonante Antenne (35 Pkt.)

Die abgestrahlte Leistung eines Dipols ist abhängig seiner Umgebung, die einen Strahlungswiderstand darstellt. Der zeitharmonisch oszillierende Dipol strahlt umso mehr Leistung ab, umso grösser der Strahlungswiderstand der Umgebung ist. Der Strahlungswiderstand entsteht durch das vom Dipol selbst an seinem Aufenthaltsort generierte elektrische Feld, gegen das die Oszillationen des Dipols aufrecht erhalten werden müssen. Eine praktische Methode um den Strahlungswiderstand einer Quelle einzustellen ist, sie mit den passiven Streuern einer Antennenstruktur zu umgeben. In dieser Aufgabe betrachten wir den einfachen Fall eines resonanten polarisierbaren Partikels als Antenne, wie es in der Nanooptik zur Verstärkung der Lichtemission fluoreszierender Quellen verwendet wird.

Ein elektrischer Punktdipol mit Dipolmoment  $\mathbf{p} = p\mathbf{n}_x$  befinde sich am Ursprung  $\mathbf{r}_0 = 0$  und oszilliere mit der Frequenz  $\omega$ . An der Position  $\mathbf{r}_\alpha = (d, 0, 0)$  befinde sich ein polarisierbares Partikel mit Polarisierbarkeit  $\alpha \in \mathbb{C}$ , in dem durch ein angelegtes elektrisches Feld  $\mathbf{E}$  ein Dipolmoment  $\mathbf{p}_{\text{ind}} = \alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha)$  induziert wird. Wir nehmen im Folgenden an, dass der Abstand  $d$  zwischen der Quelle und dem Partikel viel kleiner als die Wellenlänge  $\lambda$  sei.

- (a) (4 Pkt.) Berechnen Sie das im Partikel induzierte Dipolmoment  $\mathbf{p}_{\text{ind}}$  mithilfe der Green'schen Funktion für das Nahfeld eines elektrischen Dipols.

#### Lösung:

Es gilt für die Green'sche Funktion des Nahfeldes

$$\vec{\mathbf{G}}_{\text{NF}} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \frac{1}{k^2 R^2} \left[ -\vec{\mathbf{I}} + \frac{3}{R^2} \mathbf{RR} \right]. \quad (1)$$

Somit finden wir für das induzierte Dipolmoment

$$\mathbf{p}_{\text{ind}} = \alpha \mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha) = \alpha \omega^2 \mu_0 \mu \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_0) \mathbf{p} = \alpha \omega^2 \mu_0 \mu \frac{e^{ikd}}{4\pi d} \frac{p}{k^2 d^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

(b) (5 Pkt.) Berechnen Sie das vom Partikel gestreute Feld am Ort der primären Quelle  $\mathbf{r}_0$ .

**Lösung:**

Das vom polarisierten Partikel erzeugte Feld am Orte der primären Quelle lautet

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}_0) = (\omega^2 \mu \mu_0)^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_\alpha) \alpha \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_0) \mathbf{p} = (\omega^2 \mu \mu_0)^2 \alpha p \left( \frac{e^{ikd}}{4\pi d} \frac{2}{k^2 d^2} \right)^2 \mathbf{n}_x. \quad (3)$$

(c) (2 Pkt.) Zeigen Sie, dass im betrachteten Limit  $d \ll \lambda$  der führende Term für das gestreute Feld am Ort der primären Quelle lautet

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}_0) = (\omega^2 \mu \mu_0)^2 \alpha p \left( \frac{1}{2\pi d} \frac{1}{k^2 d^2} \right)^2 \mathbf{n}_x. \quad (4)$$

**Lösung:**

Im Limit  $d \ll \lambda$  gilt gerade  $dk \ll 1$  und somit für den Exponentialterm  $e^{ikd} \approx 1$ .

(d) (5 Pkt.) Berechnen Sie die von der primären Quelle dissipierte Leistung  $P$  in Gegenwart des Partikels. Normieren Sie sodann die berechnete Leistung mit der dissipierten Leistung  $P_0$  der Quelle in Abwesenheit des polarisierbaren Partikels, um zu zeigen, dass gilt

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{3}{2\pi \epsilon \epsilon_0 k^3 d^6} \text{Im}(\alpha). \quad (5)$$

*Hinweis:* Sie können entweder das Zeitmittel der vom gesamten elektrischen Feldes am primären Dipolmoment vollbrachten Leistung betrachten oder wahlweise auch den Fluss des Poyntingvektors des gesamten Feldes durch eine geschlossene Oberfläche um die primäre Quelle berechnen.

**Lösung:**

Es gilt

$$P = \frac{\omega}{2} \text{Im}\{\mathbf{p}^* \mathbf{E}\} = \frac{\omega}{2} \text{Im}\{\mathbf{p}^* (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s)\} = P_0 + \frac{\omega |p|^2}{8\pi^2 (\epsilon \epsilon_0)^2 d^6} \text{Im}(\alpha) \quad (6)$$

Mit der Abstrahleistung des elektrischen Dipols im homogenen Medium  $P_e = \omega k^3 |p|^2 / (12\pi \epsilon_0 \epsilon)$  finden wir

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{3}{2\pi \epsilon \epsilon_0 k^3 d^6} \text{Im}(\alpha). \quad (7)$$

Wir haben gefunden, dass der Verstärkungseffekt der Abstrahlung mit dem Imaginärteil der Polarisierbarkeit  $\alpha$  skaliert. Für die Polarisierbarkeit eines sphärischen Partikels mit Radius  $a$  gilt (vergleichen Sie diese Polarisierbarkeit mit der Magnetisierbarkeit aus Aufgabe 3 in Übung 2).

$$\alpha = 4\pi \epsilon_{\text{med}} \epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon_{\text{part}} - \epsilon_{\text{med}}}{\epsilon_{\text{part}} + 2\epsilon_{\text{med}}}, \quad (8)$$

wobei  $\varepsilon_{\text{part}}$  die dielektrische Konstante des Partikels und  $\varepsilon_{\text{med}}$  jene des umgebenden Mediums bezeichne. Wir betrachten nun ein metallisches Partikel, dessen dielektrische Konstante durch das Drude Modell beschrieben sei

$$\varepsilon_D = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}. \quad (9)$$

Hier bezeichne  $\omega_p$  die materialspezifische Plasmafrequenz und wir haben eine Dämpfungskonstante  $\gamma$  eingeführt, die Ohm'sche Verluste beschreibt. Wir zeigen im Folgenden, dass das metallische Partikel eine charakteristische Resonanz besitzt, die zur Verstärkung der Emission der Dipolquelle verwendet werden kann. Nehmen Sie im Rest der Aufgabe Vakuum als umgebendes Medium an.

- (e) (5 Pkt.) Berechnen Sie die komplexe Polarisierbarkeit  $\alpha(\omega)$  eines metallischen Partikels mit dielektrischer Konstante  $\varepsilon_D$  im Vakuum. Formulieren Sie weiterhin  $\text{Im}(\alpha)$ .

**Lösung:**

Durch Einsetzen der Drude Permittivität in Gl. (8) erhalten wir

$$\alpha = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - 3\omega(\omega + i\gamma)} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad (10)$$

wobei wir die Resonanzfrequenz  $\omega_0 = \omega_p/\sqrt{3}$  eingeführt haben. Für den Imaginärteil finden wir

$$\text{Im}(\alpha) = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \omega_0^2 \frac{\gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (11)$$

- (f) (6 Pkt.) Zeigen Sie, dass der Imaginärteil  $\text{Im}(\alpha)$  für kleine Dämpfung  $\gamma \ll \omega_0$  die Form einer Lorentzkurve annimmt

$$\text{Im}(\alpha) = \pi\varepsilon_0 a^3 \omega_0 \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}. \quad (12)$$

**Lösung:**

Wir definieren  $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$  und finden so

$$\begin{aligned} \text{Im}(\alpha) &= 4\pi\varepsilon_0 a^3 \omega_0^2 \frac{\gamma(\omega_0 - \Delta\omega)}{(\omega_0^2 + \Delta\omega^2 - 2\Delta\omega\omega_0 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2(\omega_0^2 + \Delta\omega^2 - 2\omega_0\Delta\omega)} \\ &\approx 4\pi\varepsilon_0 a^3 \omega_0^2 \frac{\gamma\omega_0}{4\omega_0^2\Delta\omega^2 + \gamma^2\omega_0^2} \\ &= \pi\varepsilon_0 a^3 \frac{\gamma\omega_0}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4}, \end{aligned} \quad (13)$$

wobei wir Terme höherer Ordnung als quadratisch in den als klein angenommenen Variablen  $\gamma$  und  $\Delta\omega$  vernachlässigt haben.

- (g) (4 Pkt.) Zeigen Sie, dass die normierte dissipierte Leistung  $P/P_0$  für das metallische Partikel lautet

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{3a^3}{2k^3 d^6} \frac{\omega_0\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}. \quad (14)$$

**Lösung:**

Einsetzen von Gl. (12) in Gl. (5) ergibt das gewünschte Ergebnis.

- (h) (4 Pkt.) Erstellen Sie einen Graphen der normierten dissipierten Leistung  $P/P_0$  des strahlenden Dipols nahe des polarisierbaren Partikels als Funktion der Frequenz  $\omega$ . Beschriften Sie Ihre Achsen und markieren Sie charakteristische Werte.

**Lösung:**

Die normierte Leistung ist in Abb. 1 dargestellt. Auf Resonanz, also bei  $\omega = \omega_0$  wird die maximale Leistung  $(P/P_0)_{\max} = 1 + 6a^3\omega_0/(k(\omega_0)^3d^6\gamma)$  dissipiert. Für eine Antenne mit kleinen Ohm'schen Verlusten  $\gamma \ll \omega_0$  ist die Frequenzabhängigkeit von  $k$  im Bereich der Lorentzkurve zu vernachlässigen.

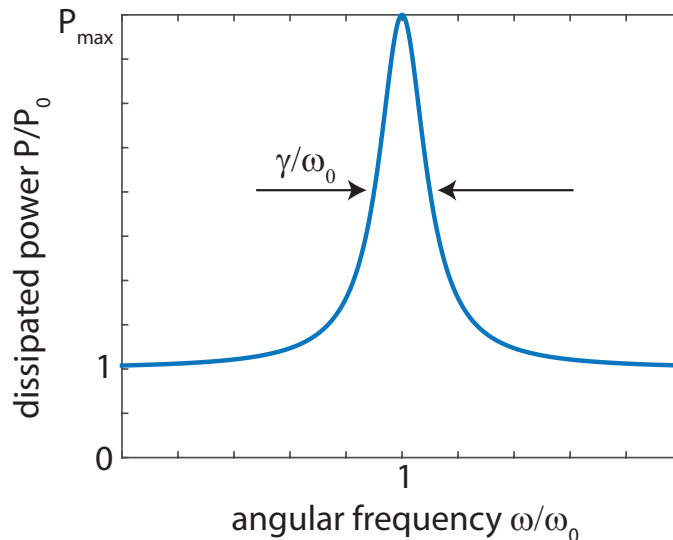


Abbildung 1: Normierte dissipierte Leistung des strahlenden Dipols in der Nähe des polarisierbaren Partikels. Der Maximalwert wird erreicht bei  $\omega = \omega_0$  und lautet  $(P/P_0)_{\max} = 1 + 6a^3\omega_0/(k^3d^6\gamma)$ .

## 2 Der magnetische Dipol (35 Pkt.)

Der zeitharmonische elektrische Dipol ist eine lineare Stromdichte bei Frequenz  $\omega$ , deren Ausdehnung viel kleiner ist, als die korrespondierende Wellenlänge, sowie jeglicher Abstand zum Beobachter. Komplementär dazu existiert der zeitharmonisch oszillierende magnetische Dipol. Dieser kann visualisiert werden als eine Leiterschleife, in der ein zeitharmonischer Kreisstrom bei der Frequenz  $\omega$  oszilliert. Die Leiterschleife ist wiederum viel kleiner als jeglicher Abstand zum Beobachter, sowie als die Wellenlänge.

Das elektrische Fernfeld einer solchen Leiterschleife, gelegen in der  $xy$ -Ebene um den Ursprung, entsprechend einem magnetischen Dipol  $\mathbf{m} = m\mathbf{n}_z$ , lautet

$$\mathbf{E}_{\infty}^{(m)}(\mathbf{r}) = n \frac{m}{c} \omega^2 \mu \mu_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \begin{pmatrix} -y/r \\ x/r \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

- (a) (5 Pkt.) Berechnen Sie das magnetische Fernfeld  $\mathbf{H}_{\infty}^{(m)}(\mathbf{r})$  des magnetischen Dipols.

### Lösung:

Mit dem Einheitsvektor in radialer Richtung  $\mathbf{n}_k = \mathbf{n}_r = (x/r, y/r, z/r)^T$  und unter Ausnutzung der Tatsache, dass Fernfelder lokal ebenen Wellen entsprechen, ergibt sich das magnetische Fernfeld aus dem elektrischen Fernfeld

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\infty}^{(m)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{Z} (\mathbf{n}_k \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) = -mk^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \begin{pmatrix} zx/r^2 \\ zy/r^2 \\ -x^2/r^2 - y^2/r^2 \end{pmatrix} \\ &= mk^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \begin{pmatrix} -zx/r^2 \\ -zy/r^2 \\ 1 - z^2/r^2 \end{pmatrix} \\ &= mk^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \begin{pmatrix} -zx/r^2 \\ -zy/r^2 \\ 1 - z^2/r^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

- (b) (6 Pkt.) Ermitteln Sie den Poyntingvektor des magnetischen Dipols.

### Lösung:

Der Poyntingvektor lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \} = \frac{1}{2Z} |E|^2 \mathbf{n}_r \\ &= \frac{(n \frac{m}{c} \omega^2 \mu \mu_0)^2}{32Z\pi^2 r^2} (1 - \frac{z^2}{r^2}) \mathbf{n}_r = \frac{m^2 \omega k^3 \mu \mu_0}{32\pi^2 r^2} \sin^2 \theta \mathbf{n}_r. \end{aligned} \quad (17)$$

- (c) (6 Pkt.) Bestimmen Sie die vom magnetischen Dipol abgestrahlte Leistung.

### Lösung:

Die abgestrahlte Leistung des magnetischen Dipols erhalten wir durch Integration des Poyntingvektors über eine Kugeloberfläche:

tingvektors

$$\begin{aligned}
 P_m &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta r^2 \sin\theta \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_r = \frac{m^2 \omega k^3 (\mu\mu_0)^2}{16\pi} \int_0^\pi d\theta \sin(\theta)(1 - \cos^2\theta) \\
 &= \frac{m^2 \omega k^3 \mu\mu_0}{16\pi} \int_0^\pi d\theta \sin^3(\theta) \\
 &= \frac{m^2 \omega k^3 \mu\mu_0}{12\pi}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass gilt  $\int_0^\pi dx \sin^3\theta = 4/3$ .

(d) (6 Pkt.) Die Richtcharakteristik (engl. directivity)

$$D(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{P/4\pi} \tag{19}$$

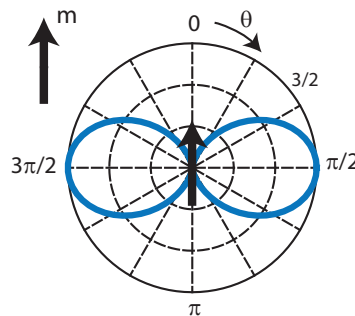
ist definiert mit der pro Einheitsraumwinkel abgestrahlten Leistung  $U(\theta, \phi) = r^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_r$ , sowie der insgesamt abgestrahlten Leistung  $P$ . Tragen Sie die Richtcharakteristik des magnetischen Dipols in Polardarstellung auf und vergleichen Sie sie mit jener des elektrischen Dipols. Halten Sie Ihren Graphen durch passende Beschriftungen quantitativ.

**Lösung:**

Wir finden

$$D(\theta) = \frac{3}{2} \sin^2\theta. \tag{20}$$

Der magnetische Dipol besitzt dieselbe charakteristische  $\sin^2\theta$  Winkelabhängigkeit des elektrischen Dipols.



(e) (12 Pkt.) Bei Betrachtung des magnetischen Feldes des magnetischen Dipols erkennen wir, dass es die räumliche Form des elektrischen Feldes des elektrischen Dipols hat. Leiten Sie mit dieser Einsicht die Green'sche Funktion für die elektrischen Fernfelder des magnetischen Dipols her, die definiert sei via  $\mathbf{E}_\infty^{(m)} = k\omega\epsilon\epsilon_0 \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_m \mathbf{m}$ .

**Lösung:**

Wir berechnen zunächst die magnetischen Fernfelder des elektrischen Dipols aus seiner

Green'schen Funktion und  $\mathbf{H} = \frac{1}{Z}(\mathbf{n}_k \times \mathbf{E})$  und finden

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{\infty}^{(x,p)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{Z} p \omega^2 \mu \mu_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \begin{pmatrix} 0 \\ z/r \\ -y/r \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H}_{\infty}^{(y,p)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{Z} p \omega^2 \mu \mu_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \begin{pmatrix} -z/r \\ 0 \\ x/r \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H}_{\infty}^{(z,p)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{Z} p \omega^2 \mu \mu_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \begin{pmatrix} y/r \\ -x/r \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{21}$$

Es gilt bei Betrachtung der Felder in Gl. (15) und (21)

$$\mathbf{E}^{(m)} = -n \frac{mZ}{cp} \mathbf{H}^{(p)}.\tag{22}$$

Mit der Definition  $\mathbf{E} = k\omega\varepsilon\varepsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_m \mathbf{m}$  finden wir die (Fernfeld-) Green'sche Funktion des magnetischen Dipols

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = Z^2 \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \begin{bmatrix} 0 & z/R & -y/R \\ -z/R & 0 & x/R \\ y/R & -x/R & 0 \end{bmatrix}.\tag{23}$$

### 3 Die elektro-magnetische Dipolantenne (30 Pkt.)

Wir betrachten einen elektrischen Dipol  $\mathbf{p} = p\mathbf{n}_x$  mit Frequenz  $\omega$  am Ursprung. Ebenfalls befinde sich am Ursprung ein magnetischer Dipol  $\mathbf{m} = me^{i\delta}\mathbf{n}_z$  mit gleicher Frequenz  $\omega$ . Es gelte  $p, m \in \mathbb{R}$  und  $\delta$  bezeichne die relative Phase zwischen den beiden Dipolen.

- (a) (8 Pkt.) Formulieren Sie das gesamte Fernfeld von magnetischem und elektrischem Dipol unter Verwendung sphärischer Koordinaten und Einheitsvektoren.

**Lösung:**

Wir betrachten das Fernfeld eines Dipols  $\mathbf{p} = p\mathbf{n}_x$ , gelegen am Ursprung. Es lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\infty}^{(p,x)}(\mathbf{r}) &= p\omega^2\mu\mu_0 \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \begin{pmatrix} 1 - \frac{x^2}{R^2} \\ -\frac{xy}{R^2} \\ -\frac{xz}{R^2} \end{pmatrix} \\ &= p\omega^2\mu\mu_0 \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \begin{pmatrix} 1 - \cos^2\phi \sin^2\theta \\ -\cos\phi \sin\phi \sin^2\theta \\ -\cos\phi \sin\theta \cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

In sphärischen Koordinaten gilt

$$\mathbf{E}_{\infty}^{(p,x)}(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2\mu_0\mu p}{4\pi R} e^{ikR} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \cos\phi \\ -\sin\phi \end{pmatrix}_{\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\phi}. \quad (25)$$

Das Fernfeld des magnetischen Dipols lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\infty}^{(m,z)}(\mathbf{r}) &= Zme^{i\delta} \sin\theta \frac{e^{ikR}}{4\pi r} k^2 \mathbf{n}_\phi \\ &= \frac{me^{i\delta}}{c} \omega^2 n \mu \mu_0 \sin\theta \frac{e^{ikR}}{4\pi r} \mathbf{n}_\phi. \end{aligned} \quad (26)$$

So ergibt sich das Gesamtfeld

$$\mathbf{E}_{\infty}^{(\text{tot})}(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2\mu_0\mu}{4\pi R} e^{ikR} \begin{pmatrix} 0 \\ p \cos\theta \cos\phi \\ e^{i\delta} \frac{m}{c} n \sin\theta - p \sin\phi \end{pmatrix}_{\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\phi}. \quad (27)$$

- (b) (5 Pkt.) Bestimmen Sie den Poynting-Vektor der elektro-magnetischen Dipolantenne.

**Lösung:**

Der Poyntingvektor lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2Z} |E|^2 \mathbf{n}_r \\ &= \frac{1}{2Z} \left( \frac{\omega^2\mu_0\mu}{4\pi R} \right)^2 \left( p^2(\cos^2\theta \cos^2\phi + \sin^2\phi) + \frac{m^2}{c^2} n^2 \sin^2\theta - 2 \cos(\delta) p n \frac{m}{c} \sin\theta \sin\phi \right) \mathbf{n}_r. \end{aligned} \quad (28)$$



- (c) (5 Pkt.) Berechnen Sie die gesamte von der Antenne abgestrahlte Leistung und zeigen Sie, dass diese von der Phase  $\delta$  unabhängig ist. Überzeugen Sie sich ausserdem, dass die abgestrahlte Leistung gerade der Summe der Strahlungsleistungen des magnetischen und des elektrischen Dipols entspricht.

**Lösung:**

Die gesamte abgestrahlte Leistung wird zu

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2Z} \left( \frac{\omega^2 \mu_0 \mu}{4\pi} \right)^2 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left( \frac{m^2}{c^2} n^2 \sin^2 \theta + \frac{p^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \right) \\
 &= \frac{4}{6Z} \left( \frac{\omega^2 \mu_0 \mu}{4\pi} \right)^2 2\pi \left( \frac{m^2}{c^2} n^2 + p^2 \right) \\
 &= P_p + P_m.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Wir haben verwendet  $\int_0^\pi \sin^3(x) dx = 4/3$  und  $\int_0^\pi \sin(x) (\cos^2(x) + 1) dx = 8/3$ .

- (d) (12 Pkt.) Erstellen Sie einen quantitativen Graphen in Polardarstellung der Abstrahlcharakteristik  $D(\theta, \phi = \pi/2, \delta)$  mit der magnetischen Dipolstärke  $m = pc/n$  für die Fälle  $\delta = 0, \pi/2, \pi$  und machen Sie sich klar, dass Sie durch Einstellen der Phase  $\delta$  die Richtung der Abstrahlung einstellen können.

**Lösung:**

Wir finden für die Abhängigkeit von  $\delta$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}(\theta, \phi = \pi/2; \delta = 0) &= \frac{1}{2Z} \left( \frac{\omega^2 \mu_0 \mu}{4\pi R} \right)^2 p^2 (1 - \sin \theta)^2 \mathbf{n}_r, \\
 \mathbf{S}(\theta, \phi = \pi/2; \delta = \pi/2) &= \frac{1}{2Z} \left( \frac{\omega^2 \mu_0 \mu}{4\pi R} \right)^2 p^2 (1 + \sin^2 \theta) \mathbf{n}_r, \\
 \mathbf{S}(\theta, \phi = \pi/2; \delta = \pi) &= \frac{1}{2Z} \left( \frac{\omega^2 \mu_0 \mu}{4\pi R} \right)^2 p^2 (1 + \sin \theta)^2 \mathbf{n}_r.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Daraus ergeben sich mit  $P = P_e + P_m$  die Richtcharakteristiken

$$\begin{aligned}
 D(\theta, \phi = \pi/2; \delta = 0) &= \frac{3}{4} (1 - \sin \theta)^2 \mathbf{n}_r, \\
 D(\theta, \phi = \pi/2; \delta = \pi/2) &= \frac{3}{4} (1 + \sin^2 \theta) \mathbf{n}_r, \\
 D(\theta, \phi = \pi/2; \delta = \pi) &= \frac{3}{4} (1 + \sin \theta)^2 \mathbf{n}_r.
 \end{aligned} \tag{31}$$

