

Übung 8

Abgabe: 30.04. bzw. 03.05.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Green'sche Funktionen, Dipolfelder

1 Nah- und Fernfelder des strahlenden Dipols (25 Pkt.)

In der Vorlesung haben Sie die Green'sche Funktion des Helmholtz-Operators hergeleitet, aus der sich unmittelbar die elektromagnetischen Felder eines zeitharmonisch oszillierenden Dipols ergeben. Dieser Umstand beruht auf der Tatsache, dass der Punktdipol gerade die punktförmige Stromverteilung darstellt, deren Felder durch die Green'sche Funktion produziert werden. In dieser Aufgabe machen wir uns mit der radialen Abhängigkeit der Dipolstrahlung vertraut. Dazu betrachten wir die Nah-, Zwischen- und Fernfelder.

Im ersten Teil versichern wir uns, dass lediglich die Fernfelder elektromagnetische Energie transportieren, bevor wir im zweiten Teil eine Relation zwischen den Nahfeldern eines zeitharmonischen und eines statischen elektrischen Dipols herstellen. Wir nutzen die Gelegenheit, um das Kalkül der Green'schen Funktionen zu wiederholen.

In sphärischen Koordinaten und unter Verwendung sphärischer Einheitsvektoren lautet das elektrische Feld eines am Ursprung gelegenen und entlang der z -Richtung mit Frequenz ω oszillierenden Dipols mit Dipolmoment p in einem Medium mit Materialparametern ε und μ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} k^2 \begin{pmatrix} \cos\theta \left(\frac{2}{k^2 r^2} - \frac{2i}{kr} \right) \\ \sin\theta \left(\frac{1}{k^2 r^2} - \frac{i}{kr} - 1 \right) \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\phi}. \quad (1)$$

Mit dem Subskript hinter dem Vektor geben wir an, dass es sich um Vektorkomponenten bezüglich der sphärischen Einheitsvektoren handelt.

- (a) (4 Pkt.) Zeigen Sie unter Verwendung einer Maxwell-Gleichung, dass das komplexe Magnetfeld des Dipols $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ in Kugelkoordinaten (unter Verwendung sphärischer Einheitsvektoren) lautet

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z} \frac{p \sin\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} k^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{i}{kr} - 1 \end{pmatrix}_{\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\phi}. \quad (2)$$

Lösung:

Wir verwenden die Maxwell-Gleichung $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mu_0\mathbf{H}$ und finden mit dem Rotationsoperator in Kugelkoordinaten nach länglicher aber simpler Rechnung obiges Ergebnis.

- (b) (4 Pkt.) Berechnen Sie den zeitgemittelten Poynting-Vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ des Dipolfeldes. Geben Sie für alle entstehenden Terme an, aus welchen Feldkomponenten sie sich ergeben (z.B. "NF,FF" für Interferenzterme aus Nah- und Fernfeld). Zeigen Sie mathematisch, dass schlussendlich lediglich Fernfelder zum Poyntingvektor beitragen und argumentieren Sie, warum dies aus Gründen der Energieerhaltung notwendig ist.

Lösung:

Nun bilden wir den zeitgemittelten Poyntingvektor

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})^*\} \\
 &= \frac{|p|^2}{2Z} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{k^2}{r} \right]^2 \operatorname{Re} \left(\begin{array}{c} \sin^2 \theta \left(\begin{array}{ccc} \overbrace{\frac{1}{k^2 r^2}}^{\text{NF}} & \overbrace{\frac{i}{kr}}^{\text{IF}} & \overbrace{1}^{\text{FF}} \\ \overbrace{\frac{i}{k^3 r^3}}^{\text{NF,IF}} & \overbrace{\frac{1}{k^2 r^2}}^{\text{NF,FF}} & \overbrace{\frac{1}{k^2 r^2}}^{\text{IF,IF}} & \overbrace{\frac{i}{kr}}^{\text{IF,FF}} & \overbrace{\frac{i}{kr}}^{\text{IF,FF}} & \overbrace{1}^{\text{FF,FF}} \end{array} \right) \\ - \sin \theta \cos \theta \left(\begin{array}{cc} \frac{2}{k^2 r^2} - \frac{2i}{kr} & (\frac{i}{kr} - 1) \\ \underbrace{-\frac{2i}{k^3 r^3}}_{\text{NF,IF}} & \underbrace{\frac{2}{k^2 r^2}}_{\text{NF,FF}} - \underbrace{\frac{2}{k^2 r^2}}_{\text{IF,IF}} - \underbrace{\frac{2i}{kr}}_{\text{IF,FF}} \end{array} \right) \\ 0 \end{array} \right) \\
 &= \frac{|p|^2}{2Z} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{k^2}{r} \right]^2 \operatorname{Re} \left(\begin{array}{c} \sin^2 \theta \left(\begin{array}{ccc} \overbrace{\frac{i}{k^3 r^3}}^{\text{NF,IF}} & \overbrace{\frac{1}{k^2 r^2}}^{\text{NF,FF}} & \overbrace{\frac{1}{k^2 r^2}}^{\text{IF,IF}} & \overbrace{\frac{i}{kr}}^{\text{IF,FF}} & \overbrace{\frac{i}{kr}}^{\text{IF,FF}} & \overbrace{1}^{\text{FF,FF}} \end{array} \right) \\ \sin \theta \cos \theta \left(\begin{array}{cc} \underbrace{-\frac{2i}{k^3 r^3}}_{\text{NF,IF}} & \underbrace{\frac{2}{k^2 r^2}}_{\text{NF,FF}} - \underbrace{\frac{2}{k^2 r^2}}_{\text{IF,IF}} - \underbrace{\frac{2i}{kr}}_{\text{IF,FF}} \end{array} \right) \\ 0 \end{array} \right) \\
 &= \frac{|p|^2}{2Z} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{k^2}{r} \right]^2 \sin^2 \theta \mathbf{n}_r
 \end{aligned} \tag{3}$$

Wir sehen, dass im zeitgemittelten Poyntingvektor die Nah- und Zwischenfeldterme entweder destruktiv interferieren oder bei der Realteilbildung wegfallen, so dass lediglich die Fernfeldterme übrig bleiben.

Zur Energieerhaltung ist es notwendig, dass der Poyntingvektor invers quadratisch vom Abstand zur Quelle abhängt, so dass der Energiefluss durch eine geschlossene Oberfläche um die Quelle vom Abstand zur Quelle unabhängig ist. Eine Abstandsabhängigkeit des Poyntingvektors vom Typ $1/r^2$ kann nur durch Multiplikation zweier (jeweils mit $1/r$ abfallender) Fernfelder erzeugt werden.

- (c) (4 Pkt.) Wir wenden uns nun dem Nahfeld des zeitharmonischen Dipols zu. Formulieren Sie die komplexen elektrischen und magnetischen Nahfelder des strahlenden Dipols in sphärischen Koordinaten unter Verwendung sphärischer Einheitsvektoren. Formulieren Sie das zeitabhängige reelle elektrische Nahfeld des strahlenden Dipols mit reellem Dipolmoment $p \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Das Nahfeld des Dipols lautet für $kr \ll 1$

$$\mathbf{E}_{\text{NF}}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_{\text{NF}}(\mathbf{r}) = 0, \quad (5)$$

das magnetische Nahfeld verschwindet. Das zeitabhängige Nahfeld lautet also für $p \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}_{\text{NF}}(\mathbf{r}, t) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t). \quad (6)$$

Wir vergleichen das Nahfeld des zeitharmonisch oszillierenden Dipols nun mit dem Feld eines statischen elektrischen Dipols. Hierzu leiten wir dessen Feld nochmals in Analogie zur Herleitung der Felder des strahlenden Dipols her. Es gilt

$$\nabla \cdot \epsilon\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Im quellfreien Raum existiert ein (elektrostatistisches) Potential Φ , so dass gilt $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Somit finden wir die Poissongleichung

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (8)$$

Dies ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung vom Typ

$$\mathcal{L}\mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (9)$$

wobei der Differentialoperator hier der Laplace-Operator ist, so dass gilt $\mathcal{L} = \nabla^2$. Zur allgemeinen Lösung suchen wir die Green'sche Funktion G_L des Laplace-Operators, für die gelten soll

$$\nabla^2 G_L(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (10)$$

- (d) (6 Pkt.) Machen Sie sich klar, dass der Laplace-Operator gerade der Helmholtz-Operator im Limes verschwindender Frequenz ist. Somit muss die Green'sche Funktion des Laplace-Operators gerade gleich der Green'schen Funktion des Helmholtz-Operators im Limes verschwindender Frequenz sein und es muss gelten

$$G_L(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (11)$$

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass Gl. (11) die Gl. (10) erfüllt.

Lösung:

Im Fall $\omega \rightarrow 0$ gilt mit $k = n\omega/c$ für den Helmholtz-Operator $\nabla^2 + n^2\omega^2/c^2 \rightarrow \nabla^2$ und für die Green'sche Funktion des Helmholtz-Operators

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rightarrow \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = G_L(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (12)$$

Wir haben zu zeigen, dass gilt

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (13)$$

Dazu integrieren wir über eine Kugel mit Radius R um die Quelle, um zu finden

$$\int_V dV' \nabla \cdot \nabla \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -1. \quad (14)$$

Anwendung des Satzes von Gauss auf die linke Seite ergibt

$$\int_{\partial V} da' \mathbf{n}_r \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi, \quad (15)$$

wobei wir mit \mathbf{n}_r den Radiusvektor der Kugel bezeichnen. Wir berechnen den Gradienten

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{\mathbf{n}_r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (16)$$

und verwenden diese Einsicht in obigem Integral zusammen mit $da = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \sin \theta d\theta d\phi$

$$-\int_{\partial V} da' \frac{\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = -\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta = -4\pi, \quad (17)$$

womit gezeigt wäre, dass $G_L(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ die Green'sche Funktion des Laplace-Operators darstellt.

- (e) (4 Pkt.) Berechnen Sie das Potential eines statischen Dipols gelegen am Ursprung, ausgerichtet entlang der z -Achse, mithilfe der Green'schen Funktion des Laplace-Operators. Dieser Dipol kann angenähert werden durch die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}) = q[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}')] mit $\mathbf{r}' = (0, 0, d/2)^T$ im Limes $d \rightarrow 0$ und gleichzeitig $p = qd = \text{const.}$$

Lösung:

Das Potential einer Ladungsverteilung ρ lautet

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (18)$$

Für die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}) = q[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}')] finden wir$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}} \right). \quad (19)$$

Mit der Entwicklung $1/\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2} \approx (1 + \frac{zd}{2r^2})/r$ finden wir das Potential des Dipols für $d \rightarrow 0$ mit $qd = p = \text{const.}$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{qzd}{r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (20)$$

- (f) (3 Pkt.) Berechnen Sie das elektrische Feld des statischen Dipols in sphärischen Koordinaten unter Verwendung sphärischer Einheitsvektoren und vergleichen Sie es in einigen Sätzen mit dem Nahfeld des zeitharmonisch oszillierenden Dipols.

Lösung:

Mit dem Gradienten in Kugelkoordinaten

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{n}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{n}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{n}_\phi \quad (21)$$

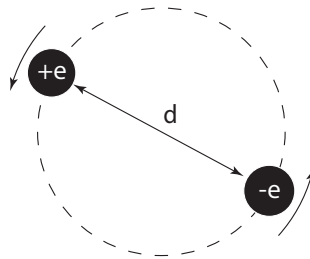
erhalten wir

$$\mathbf{E}_{\text{stat}} = -\nabla \phi = \frac{p}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Das Nahfeld des oszillierenden Dipols aus Gl. (6) ist somit gleich dem Feld eines elektrostatischen Dipols, multipliziert mit einem zeitharmonischen Faktor.

2 Die Positronium-Antenne (75 Pkt.)

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts hatte man das Atommodell entwickelt zum Bild eines positiv geladenen Kernes, den negativ geladene Elektronen auf Bahnen umkreisen. Dieses Modell steht in fundamentalem Widerspruch mit dem Maxwell'schen Elektromagnetismus, der seit dem Ende des 19. Jahrhunderts etabliert wurde. Erst die Entwicklung der Quantenmechanik erlaubte den Entwurf eines Atommodells, das mit dem Elektromagnetismus in Einklang zu bringen war.



In dieser Aufgabe beleuchten wir den Widerspruch des Rutherford'schen Atommodells. Er beruht darauf, dass beschleunigte Ladungen elektromagnetische Energie abstrahlen. Ein Elektron auf einem Orbit sollte also seine Energie abstrahlen und schlussendlich in den Kern stürzen. Während das einfachste in der Natur vorkommende Atom das Wasserstoffatom ist, betrachten wir der Einfachheit halber ein Positroniumatom, welches aus einem Elektron mit Ladung $-e$ und seinem Antiteilchen mit gleicher Masse, dem Positron mit Ladung $+e$ besteht. Die beiden Teilchen umkreisen den gemeinsamen Schwerpunkt, der im Ursprung liege. Ausserdem liege die Rotationsebene in der xy -Ebene und wir betrachten das Problem in einem hypothetischen Medium mit Materialparametern ε und μ .

- (a) (2 Pkt.) Formulieren Sie das zeitabhängige Dipolmoment $\mathbf{p}(t)$ des Positroniums als Superposition eines zeitharmonischen Dipols entlang der x - und eines entlang der y -Achse. Wählen Sie die Anfangsbedingung so, dass gilt $\mathbf{p}(t = 0) = p\mathbf{n}_x$. Bezeichnen Sie den Betrag des Dipolmoments des Positroniums ab sofort schlicht mit $p \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie ausserdem das komplexe Dipolmoment \mathbf{p} des Positroniums.

Lösung:

Es gilt für die kreisenden Ladungen

$$\mathbf{p}(t) = p[\cos(\omega t)\mathbf{n}_x + \sin(\omega t)\mathbf{n}_y], \quad (23)$$

und für das komplexe Dipolmoment mit $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{p}e^{-i\omega t}\}$

$$\mathbf{p} = p \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Der rotierende statische Dipol kann also geschrieben werden als Superposition zweier phasenverschobener und aufeinander senkrecht stehender zeitharmonischer Dipole.

- (b) (4 Pkt.) Nachdem wir das komplexe Dipolmoment des Positroniums bestimmt haben, wenden wir uns den abgestrahlten Feldern zu. Da wir uns schlussendlich für die abgestrahlte Leistung

interessieren, beschränken wir uns auf die Fernfelder. Formulieren Sie das komplexe Fernfeld \mathbf{E}_x eines entlang der x -Achse oszillierenden Dipols (gelegen im Ursprung) in kartesischen Koordinaten.

Lösung:

Das Fernfeld eines Dipols entlang der x -Achse lautet unter Verwendung kartesischer Einheitsvektoren

$$\mathbf{E}_x = \frac{\omega^2 \mu_0 \mu p}{4\pi R} e^{ikR} \begin{pmatrix} 1 - x^2/R^2 \\ -xy/R^2 \\ -xz/R^2 \end{pmatrix} = \frac{\omega^2 \mu_0 \mu p}{4\pi R} e^{ikR} \begin{pmatrix} 1 - \cos^2 \phi \sin^2 \theta \\ -\sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta \\ -\cos \phi \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (25)$$

- (c) (8 Pkt.) Schreiben Sie das Fernfeld des Dipols \mathbf{E}_x aus der vorherigen Teilaufgabe in sphärischen Koordinaten unter Verwendung der sphärischen Einheitsvektoren, für die gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{n}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{n}_\theta - \sin \phi \mathbf{n}_\phi, \\ \mathbf{n}_y &= \sin \theta \sin \phi \mathbf{n}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{n}_\theta + \cos \phi \mathbf{n}_\phi, \\ \mathbf{n}_z &= \cos \theta \mathbf{n}_r - \sin \theta \mathbf{n}_\theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Lösung:

In sphärischen Koordinaten gilt

$$\mathbf{E}_x = \frac{\omega^2 \mu_0 \mu p}{4\pi R} e^{ikR} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix}_{\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\phi}. \quad (27)$$

Mit dem Subskript hinter dem Vektor zeigen wir an, dass es sich um die Vektorkomponenten bezüglich der sphärischen Einheitsvektoren handelt.

- (d) (8 Pkt.) Formulieren Sie das elektrische Fernfeld eines Dipols, der entlang der y -Achse mit Kreisfrequenz ω oszilliert, einmal in kartesischen Koordinaten unter Verwendung kartesischer Einheitsvektoren und einmal in Kugelkoordinaten unter Verwendung sphärischer Einheitsvektoren.

Lösung:

Das Fernfeld eines Dipols entlang der y -Achse lautet unter Verwendung kartesischer Einheitsvektoren

$$\mathbf{E}_y = \frac{\omega^2 \mu_0 \mu p}{4\pi R} e^{ikR} \begin{pmatrix} -xy/R^2 \\ 1 - y^2/R^2 \\ -yz/R^2 \end{pmatrix} = \frac{\omega^2 \mu_0 \mu p}{4\pi R} e^{ikR} \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta \\ 1 - \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\ -\sin \phi \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (28)$$

In sphärischen Koordinaten gilt

$$\mathbf{E}_y = \frac{\omega^2 \mu_0 \mu p}{4\pi R} e^{ikR} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}_{\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\phi}. \quad (29)$$

- (e) (12 Pkt.) Berechnen Sie das magnetische Fernfeld $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ des entlang der x -Richtung und das entlang der y -Richtung oszillierenden Dipols.

Hinweis: Sie erhalten das Magnetfeld aus dem elektrischen Feld unter Verwendung einer Maxwell'schen Rotationsgleichung. Sie erleichtern sich die Rechnung, wenn Sie verwenden, dass die Fernfelder lokal ebene Wellen sind.

Lösung:

Das Magnetfeld im Fernfeld erhalten wir aus $\mathbf{H} = \frac{1}{Z} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \mathbf{E}$. Weit weg von der Quelle sind die Felder lokal ebene Wellen und es gilt $\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \mathbf{n}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für die Felder finden wir

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_x &= \frac{\omega^2 \mu_0 \mu p}{Z 4 \pi R} e^{ikR} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}_{\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\phi}, \\ \mathbf{H}_y &= \frac{\omega^2 \mu_0 \mu p}{Z 4 \pi R} e^{ikR} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \end{pmatrix}_{\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\phi}. \end{aligned} \quad (30)$$

- (f) (8 Pkt.) Berechnen Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ für das Positronium.

Lösung:

Nun berechnen wir den Poyntingvektor $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\}$ für einen Dipol $\mathbf{p} = p(\mathbf{n}_x + i\mathbf{n}_y)$

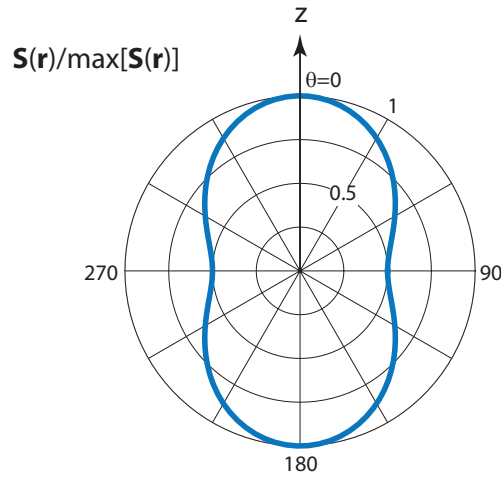
$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \text{Re}\{(\mathbf{E}_x + i\mathbf{E}_y) \times (\mathbf{H}_x + i\mathbf{H}_y)^*\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E}_x \times \mathbf{H}_x^* + \mathbf{E}_y \times \mathbf{H}_y^* - i\mathbf{E}_x \times \mathbf{H}_y^* + i\mathbf{E}_y \times \mathbf{H}_x^*\} = \mathbf{S}_x + \mathbf{S}_y. \end{aligned} \quad (31)$$

Die beiden letzten Terme in der vorletzten Zeile sind rein imaginär und ist der Poyntingvektor der beiden phasenverschobenen und senkrecht aufeinanderstehenden Dipole gerade gleich der Summe der Poyntingvektoren der beiden einzelnen Dipole. Die beiden Dipole interferieren also nicht.

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2Z} \left(\frac{\omega^2 \mu_0 \mu p}{4\pi R} \right)^2 \text{Re} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2Z} \left(\frac{\omega^2 \mu_0 \mu p}{4\pi R} \right)^2 \text{Re} \left\{ \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2Z} \left(\frac{\omega^2 \mu_0 \mu p}{4\pi R} \right)^2 (\cos^2 \theta + 1) \mathbf{n}_r \end{aligned} \quad (32)$$

- (g) (6 Pkt.) Erstellen Sie einen Graphen der Abstrahlcharakteristik des Positroniums. Verwenden Sie hierzu die Polardarstellung, in der Sie den Winkel θ zur z -Achse auftragen und den (geeignet normierten) zeitgemittelten Poyntingvektor als radiale Grösse.

Lösung:



- (h) (8 Pkt.) Berechnen Sie nun die gesamte abgestrahlte Leistung des Positroniums, indem Sie den Poyntingvektor über eine geeignet gewählte Oberfläche integrieren. Zeigen Sie, dass die Strahlungsleistung des Positroniums zweimal der Strahlungsleistung eines einfachen Dipols mit Dipolmoment p in einem homogenen Medium entspricht.

Hinweis: Das Integral $\int_0^\pi dx \sin x \cos^2 x = 2/3$ sollte hilfreich sein.

Lösung:

Wir erhalten die gesamte abgestrahlte Leistung als Integral über eine Kugeloberfläche um den Ursprung

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{\partial V} \mathbf{dA} \cdot \mathbf{S} \\
 &= \frac{1}{2Z} \left(\frac{\omega^2 \mu_0 \mu p}{4\pi} \right)^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta (\cos^2 \theta + 1) \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= \frac{k^3 \omega p^2}{6\pi \epsilon_0 \epsilon} \\
 &= 2P_0.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass gilt $\int_0^\pi dx \sin x \cos^2 x = 2/3$ und $\int_0^\pi dx \sin x = 2$, sowie die Leistung $P_0 = \frac{p^2 k^3 \omega}{12\pi \epsilon_0 \epsilon}$, die von einem einzelnen Dipol abgestrahlt wird.

- (i) (5 Pkt.) Betrachten Sie das elektromagnetische Feld, das vom Positronium in z -Richtung abgestrahlt wird. Bestimmen Sie den Polarisationszustand und veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis anhand der Abstrahlcharakteristik und der Polarisation der Felder eines einzelnen Dipols in wenigen Sätzen.

Lösung:

Entlang der z -Achse lautet das Feld

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_x(x=0, y=0, z) + i\mathbf{E}_y(x=0, y=0, z) = \frac{\omega^2 \mu_0 \mu p}{4\pi z} e^{ikz} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Das Feld ist also zirkular polarisiert. Die beiden phasenverschobenen Dipole, als die wir das Positronium modelliert haben, haben bei das Maximum ihrer Abstrahlcharakteristik in z -Richtung. Jeder Dipol produziert in z -Richtung ein linear entlang der Dipolachse polarisiertes Feld. Da die beiden Dipole 90° ausser Phase sind, gilt dies auch für ihre Felder. Die Kombination zweier um 90° phasenverschobener linearer Felder ergibt zirkulare Polarisation.

- (j) (4 Pkt.) Wie ist der Polarisationszustand der Felder entlang der x - und der y -Richtung? Kommentieren Sie Ihr Resultat hinsichtlich der Polarisation der abgestrahlten Felder eines einzelnen (linearen) Dipols.

Lösung:

Entlang der x -Achse lautet das Feld

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_x(x, y = 0, z = 0) + i\mathbf{E}_y(x, y = 0, z = 0) = \frac{\omega^2 \mu_0 \mu_P}{4\pi x} e^{ikx} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Das Feld ist also linear entlang der y -Richtung polarisiert. Dies ergibt sich daraus, dass der in x -Richtung zeigende Dipol entlang der y -Achse maximal abstrahlt, der in y -Richtung orientierte Dipol jedoch keinerlei Leistung entlang seiner Achse aussendet.

Entlang der y -Achse lautet das Feld (analog zur x -Achse)

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_x(x = 0, y, z = 0) + i\mathbf{E}_y(x = 0, y, z = 0) = \frac{\omega^2 \mu_0 \mu_P}{4\pi y} e^{iky} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Das Feld ist also linear entlang der x -Richtung polarisiert und relativ zum Feld entlang der x -Achse um 90° phasenverschoben.

- (k) (6 Pkt.) Nehmen Sie an, dass wir eine einfache mechanische Antenne als Analog zum Positronium gebaut haben. Unsere Antenne bestehe aus zwei Kugeln (jede mit Masse m), die durch einen isolierenden Stab im Abstand d gehalten werden. Ausserdem wurden die Kugeln durch einen Generator mit den Ladungen $\pm q$ versehen. Wir versetzen die Anordnung zur Zeit $t = 0$ in Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 . Wir befinden uns im Vakuum und es gebe keinerlei mechanische Reibungsverluste. In einigem Abstand haben wir eine Empfangsantenne aufgebaut, mit der wir die Frequenz der eintreffenden Strahlung detektieren können. Berechnen Sie die Winkelfrequenz $\omega(t)$ bei der unsere Empfangsantenne Signale empfängt. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Einheiten und überzeugen Sie sich, dass Ihr Resultat von d unabhängig ist.

Lösung:

Wir betrachten den Energieinhalt des Aufbaus. Die potentielle Energie in unserem System ist konstant, da die Ladung auf den Kugeln und deren Abstand konstant bleibt. Die kinetische Energie ist

$$E_{\text{kin}} = 2 \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 = m(d/2)^2 \omega^2. \quad (37)$$

Die Änderung der Energie im System ist gegeben durch die Strahlungsverluste, die durch Gl. (33) gegeben ist, so dass (im Vakuum) mit $p = qd$ gelten muss

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} E_{\text{kin}} &= 2m(d/2)^2 \omega \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\omega^4 p^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = P_{\text{rad}} \\ \frac{d\omega}{\omega^3} &= -\frac{p^2 dt}{3\pi\epsilon_0 m d^2 c^3} \\ \omega^{-2} &= \frac{2p^2 t}{3\pi\epsilon_0 m d^2 c^3} + \omega_0^{-2} \\ \omega(t) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2q^2 t}{3\pi\epsilon_0 m c^3} + \omega_0^{-2}}}\end{aligned}\tag{38}$$

- (I) (4 Pkt.) Sie haben in der vorhergehenden Teilaufgabe gefunden, dass die Rotationsgeschwindigkeit der Antenne in der Zeit abnimmt. Beschreiben Sie in wenigen Sätzen, welche "Reibungskraft" hier am Werk ist, die die Rotation bremst, und was ihr Ursprung ist.

Lösung:

Die rotierende Antenne strahlt elektromagnetische Energie ab. Diese abgestrahlte Energie wird aus mechanischer Rotationsenergie erzeugt. Die bremsende Kraft ist die Lorenzkraft, die auf die Ladungen auf den Kugeln wirkt. Diese Lorenzkraft entsteht, weil die Kugeln das von ihnen selbst generierte Feld verspüren. Die Bewegung der geladenen Kugeln gegen das eigene Feld kostet Arbeit und reduziert sukzessive die Rotationsgeschwindigkeit der mechanischen Antenne.