Übung 7

Abgabe: 12.04. bzw. 16.04.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Energiefluss, Potentiale

1 Energieerhaltung an Grenzflächen (50 Pkt.)

Laut dem Poynting Theorem ist mit der Propagation elektromagnetischer Strahlung stets ein Energiefluss verbunden. Die in der Sonne durch nukleare Fusionsprozesse erzeugte Energie wird beispielsweise durch elektromagnetische Strahlung zur Erde transportiert. Ebenso ist auch jeglicher Informationsaustausch in drahtlosen Netzwerken stets mit einem Energiefluss vom Sender zum Empfänger verbunden. Formal ist dieser Energiefluss durch den Poynting Vektor $\mathbf{S}$ beschrieben. Für ein monochromatisches Feld ergibt sich der zeitliche Mittelwert des Poynting Vektors aus den komplexen Feldamplituden nach

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})\}. \tag{1}$$

In verlustfreien Medien ($\varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$) muss die Strahlungsenergie erhalten sein. Dies gilt natürlich insbesondere an Grenzflächen zwischen verlustfreien Medien. Wir betrachten in dieser Aufgabe den Energietransport über eine Grenzfläche zwischen einem Medium 1 mit Materialkonstanten ε_1 und μ_1 im Halbraum $z < 0$ und einem Medium 2 (ε_2 und μ_2) im Halbraum $z > 0$.

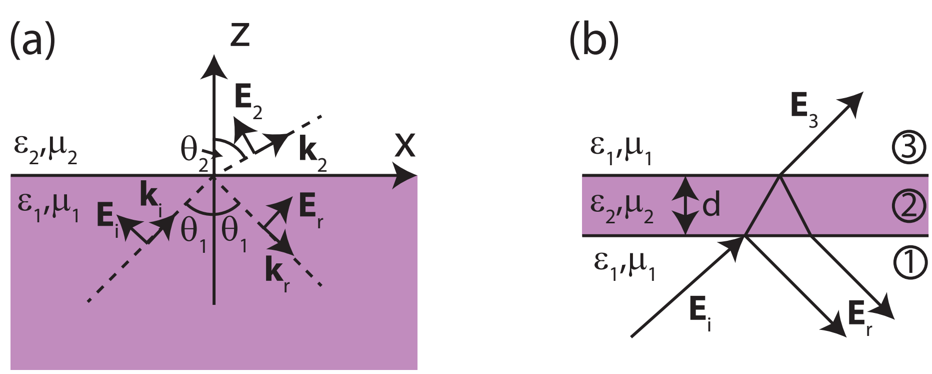

Abbildung 1: (a) Eine p-polarisierte ebene monochromatische Welle trifft unter dem Winkel θ_1 aus einem Medium 1 mit Materialparametern ε_1, μ_1 auf eine Grenzfläche mit einem Medium 2 mit ε_2, μ_2 auf. Die Einfallsebene sei die $y = 0$ Ebene. (b) Schichtsystem mit Material 2 der Dicke d eingebettet zwischen Material 1 (unten) und Material 3 (oben), wobei die Materialien 1 und 3 gleich seien.

Vom Medium 1 falle eine monochromatische ebene Welle unter einem Winkel θ_1 zur Grenzflächennormalen in der $y = 0$ Ebene ein, wie in Abb. 1(a) gezeigt. Der Poynting Vektor im Medium j sei $\langle \mathbf{S}_j \rangle$ und seine z-Komponente $\langle \mathbf{S}_j \rangle_z$. Wir überzeugen uns im Folgenden (exemplarisch für ein p-polarisiertes Feld), dass der Energiefluss normal zur Grenzfläche über diese hinweg erhalten ist, so dass gilt

$$\langle \mathbf{S}_2 \rangle \cdot \mathbf{n}_z = \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \mathbf{n}_z. \tag{2}$$

(a) (8 Pkt.) Formulieren Sie unter Verwendung der Fresnel-Koeffizienten das einfallende p-polarisierte elektrische Feld $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ mit komplexer Amplitude E_0, sowie das reflektierte Feld $\mathbf{E}_r(\mathbf{r})$ und das transmittierte Feld $\mathbf{E}_t(\mathbf{r})$ in Vektorschreibweise. Wie lautet das Gesamtfeld $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ im Halbraum 1? Ersetzen Sie sämtliche Winkel durch die Parallelkomponenten k_{x1}, k_{x2} sowie die z-Komponenten k_{z1}, k_{z2} der Wellenvektoren. Welche Relation gilt zwischen k_{x1} und k_{x2}?

Lösung:
Wir finden unter Erhaltung der Parallelkomponenten des Wellenvektors ($k_{x1} = k_{x2} = k_x$)

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = E_0 \begin{pmatrix} -k_{z1}/k_1 \\ 0 \\ k_x/k_1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_1\mathbf{r}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}_1 = k_1 \begin{pmatrix} \sin\theta_1 \\ 0 \\ \cos\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_{z1} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

sowie

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = E_0 r^p \begin{pmatrix} k_{z1}/k_1 \\ 0 \\ k_x/k_1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_{1r}\mathbf{r}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}_{1r} = k_1 \begin{pmatrix} \sin\theta_1 \\ 0 \\ -\cos\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ -k_{z1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

und $k_1 = n_1\omega/c$. Somit lautet das Gesamtfeld im Halbraum 1

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = E_0 \begin{pmatrix} (k_{z1}/k_1)\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_1\mathbf{r}} + r^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_{1r}\mathbf{r}}\right) \\ 0 \\ (k_x/k_1)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_1\mathbf{r}} + r^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_{1r}\mathbf{r}}\right) \end{pmatrix} \tag{5}$$

und das transmittierte Feld im Halbraum 2

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = t^p E_0 \begin{pmatrix} -k_{z2}/k_2 \\ 0 \\ k_x/k_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_2\mathbf{r}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_{z2} \end{pmatrix} \tag{6}$$

und $k_2 = n_2\omega/c$.

(b) (4 Pkt.) Berechnen Sie die magnetischen Felder $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$ (aus $\mathbf{H}_i(\mathbf{r})$ und $\mathbf{H}_r(\mathbf{r})$) sowie $\mathbf{H}_t(\mathbf{r})$.

Lösung:
Aus der Maxwellgleichung $\nabla \times \mathbf{E} = \mathrm{i}\omega\mu\mu_0\mathbf{H}$ erhalten wir

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{E_0}{Z_1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_1\mathbf{r}} - r^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_{1r}\mathbf{r}} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{E_0}{Z_2} \begin{pmatrix} 0 \\ -t^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_2\mathbf{r}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

(c) (4 Pkt.) Zeigen Sie, dass der Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche im Medium 1 lautet

$$\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r}) \rangle_z = \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{Z_1} \frac{k_{z1}}{k_1} \left(1 - |r^p|^2\right). \tag{9}$$

Lösung:
Es gilt mit den Feldern im Medium 1

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r}) \rangle_z &= \mathbf{n}_z \cdot \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_1^*(\mathbf{r})\right\} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{E_{1x}(\mathbf{r})\, H_{1y}^*(\mathbf{r})\right\} \\ &= \frac{|E_0|^2}{2Z_1} \frac{k_{z1}}{k_1} \mathrm{Re}\left\{1 - |r^p|^2 - 2\mathrm{i}\mathrm{Im}\left\{r^p \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k_{z1}z}\right\}\right\} \\ &= \frac{|E_0|^2}{2Z_1} \frac{k_{z1}}{k_1} \left(1 - |r^p|^2\right), \end{aligned} \tag{10}$$

wobei wir verwendet haben, dass gilt $k_{z1} \in \mathbb{R}$.

(d) (2 Pkt.) Berechnen Sie den Energiefluss im Halbraum 1 in z-Richtung im Falle von Totalreflexion an der Grenzfläche. Betrachten Sie dazu den aus der Vorlesung bekannten Ausdruck für den Reflexionskoeffizienten. Begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich.

Lösung:
Im Falle von Totalreflexion gilt $|r|^2 = 1$ und somit gilt $\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r}) \rangle_z = 0$. Dieses Ergebnis ist einsichtig, da bei Totalreflexion alle Energie reflektiert wird.

(e) (4 Pkt.) Zeigen Sie, dass der Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche im Medium 2 lautet

$$\langle \mathbf{S}_2(\mathbf{r}) \rangle_z = \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{Z_2} \frac{\mathrm{Re}(k_{z2})}{k_2} |t^p|^2. \tag{11}$$

Lösung:
Wir finden mit den Feldern im Medium 2

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_2(\mathbf{r}) \rangle_z &= \mathbf{n}_z \cdot \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_2^*(\mathbf{r})\right\} \quad = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{E_{2x}(\mathbf{r})\, H_{2y}^*(\mathbf{r})\right\} \\ &= \frac{|E_0|^2}{2Z_2} \frac{\mathrm{Re}(k_{z2})}{k_2} |t^p|^2. \end{aligned} \tag{12}$$

(f) (2 Pkt.) Berechnen Sie den Energiefluss im Halbraum 2 in z-Richtung im Falle von Totalreflexion an der Grenzfläche. Was bedeutet Ihr Ergebnis für den Energietransport durch evaneszente Felder?

Lösung:
Im Falle von Totalreflexion ist das Feld im Medium 2 evaneszent, so dass $\mathrm{Re}(k_{z2}) = 0$ gilt. Das evaneszente Feld transportiert also keine Energie senkrecht zur Grenzfläche.

(g) (5 Pkt.) Zeigen Sie nun, dass der Energiefluss normal zur Grenzfläche über diese hinweg erhalten ist, also Gl. (2) gilt. Benutzen Sie dabei die aus der Vorlesung bekannten Ausdrücke für die Fresnel-Koeffizienten.

Lösung:
Der Quotient aus den Energieflüssen jenseits und diesseits der Grenzfläche lautet

$$\frac{\langle \mathbf{S}_2(\mathbf{r})\rangle_z}{\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r})\rangle_z} = \frac{|t^p|^2}{\left(1-|r^p|^2\right)} \frac{\mathrm{Re}(k_{z2})}{k_{z1}} \frac{k_1}{k_2} \frac{Z_1}{Z_2}. \tag{13}$$

Wir betrachten zunächst den Term mit r^p unter der Bedingung, dass $k_{z1} \in \mathbb{R}$ gilt (einfallendes Feld ist ebene Welle), während jedoch $k_{z2} \in \mathbb{C}$ sein kann, da das transmittierte Feld im Falle von Totalreflexion evaneszent sein kann. Wir erhalten so aus

$$r^p = \frac{\varepsilon_2 k_{z1} - \varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}} \tag{14}$$

den Ausdruck

$$1 - |r^p|^2 = \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2 k_{z1}\mathrm{Re}(k_{z2})}{(\varepsilon_2 k_{z1})^2 + \varepsilon_1^2 \left|k_{z2}\right|^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 k_{z1}\mathrm{Re}(k_{z2})}. \tag{15}$$

Für den Transmissionskoeffizienten

$$t^p = \frac{2\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}} \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2}} \tag{16}$$

finden wir für das Betragsquadrat

$$|t^p|^2 = \frac{4\varepsilon_2^2 k_{z1}^2}{(\varepsilon_2 k_{z1})^2 + \varepsilon_1^2 \left|k_{z2}\right|^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 k_{z1}\mathrm{Re}(k_{z2})} \frac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2}. \tag{17}$$

Somit ergibt sich

$$\frac{|t^p|^2}{\left(1-|r^p|^2\right)} = \frac{k_{z1}}{\mathrm{Re}(k_{z2})} \frac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tag{18}$$

und mit den Definitionen $k_i = n_i\omega/c$ sowie $Z_i = \sqrt{\mu_i\mu_0}/\sqrt{\varepsilon_i\varepsilon_0}$ erhalten wir

$$\frac{\langle \mathbf{S}_2(\mathbf{r})\rangle_z}{\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r})\rangle_z} = \frac{k_{z1}}{\mathrm{Re}(k_{z2})} \frac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\mathrm{Re}(k_{z2})}{k_{z1}} \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} \frac{\sqrt{\mu_1\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_2\varepsilon_1}} = 1 \tag{19}$$

In der Tat ist also der Energiefluss normal zu einer Grenzfläche zwischen zwei verlustfreien Medien über diese hinweg erhalten. Im speziellen Falle von Totalreflexion ist dies natürlich auch der Fall. Hier beträgt der Nettoenergiefluss normal zur Grenzfläche auf beiden Seiten null. Im unteren Medium heben sich die entgegengesetzten Energieflüsse der einfallenden und der reflektierten Welle gerade auf, im oberen Medium existiert lediglich eine evaneszente Welle, die keinerlei Energie senkrecht zur Grenzfläche transportiert.

Wir bringen nun hinter die Grenzfläche zwischen den Medien 1 und 2 in einem Abstand d eine weitere Grenzfläche zu einem Medium 3 mit denselben Materialparametern wie das Medium 1, wie in Abb. 1(b) gezeigt. Es lässt sich zeigen, dass für den Transmissionskoeffizienten durch die beiden Grenzflächen gilt

$$t_{\mathrm{ges}} = \frac{t_{12}t_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{1 - r_{21}^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}, \tag{20}$$

mit der innerhalb des Mediums 2 aufgenommenen Phase $\varphi = k_{z2}d$.

(h) (2 Pkt.) Argumentieren Sie ohne Rechnung, wie das Verhältnis der Energieflüsse $\frac{\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r})\rangle_z}{\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r})\rangle_z}$ senkrecht zu den Grenzflächen in den Medien 1 und 3 lauten muss.

Lösung:
Es gilt $\frac{\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r})\rangle_z}{\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r})\rangle_z} = 1$, da der Energiefluss an jeder Grenzfläche einzeln erhalten ist, wie oben gezeigt.

(i) (4 Pkt.) Berechnen Sie den Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche im Medium 3 in Abhängigkeit von der Amplitude des einfallenden Feldes E_0, seinem Einfallswinkel θ_1, der Wellenimpedanz Z_1 und dem gesamten Transmissionskoeffizienten t_{ges}.

Lösung:
Wir orientieren uns am Ergebnis der Aufgabe (e) und erhalten, da die Medien 1 und 3 identisch sind, mit $k_{z3} = k_{z1} \in \mathbb{R}$

$$\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r})\rangle_z = \frac{1}{2}\frac{|E_0|^2 \,\mathrm{Re}(k_{z3})}{Z_3 k_3}\,|t_{\text{ges}}|^2 = \frac{1}{2}\frac{|E_0|^2 \cos\theta_1}{Z_1}\,|t_{\text{ges}}|^2 . \tag{21}$$

(j) (3 Pkt.) Welchen Wert muss t_{ges} für $d \to 0$ annehmen? Beweisen Sie Ihre Behauptung, indem Sie die aus der Vorlesung bekannten Fresnel-Koeffizienten in Gl. (20) einsetzen.

Lösung:
Für $d = 0$ ist die Schicht nicht präsent und es muss gelten $t_{\text{ges}} = 1$. Es gilt für $d = 0$

$$t_{\text{ges}} = \frac{t_{12}t_{21}}{1 - r_{21}^2}. \tag{22}$$

Durch Einsetzen der Fresnel-Koeffizienten ist dieser Zusammenhang leicht zu zeigen, denn es gilt

$$t_{12}t_{21} = \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2 k_{z1}k_{z2}}{(\varepsilon_1 k_{z2} + \varepsilon_2 k_{z1})^2} \tag{23}$$

und ebenso

$$1 - r_{21}^2 = \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2 k_{z1}k_{z2}}{(\varepsilon_1 k_{z2} + \varepsilon_2 k_{z1})^2}. \tag{24}$$

Ein Fabry-Pérot Etalon ist ein optisches Filterelement, bei dem die Transmission durch eine dünne Schicht als Funktion der Frequenz der einfallenden Strahlung durch Interferenzeffekte periodische Maxima zeigt. Hier betrachten wir nun den Fall, dass $n_1 > n_2$ gilt und somit bei Einfallswinkeln grösser als $\theta_1 = \sin^{-1}(n_2/n_1)$ Totalreflexion an der ersten Grenzfläche auftritt, die durch die Präsenz der zweiten Grenzfläche frustiert werden kann. Wir vertiefen in diesem Aufgabenteil das Verständnis, das uns in der Aufgabe 3 der Übung 6 erarbeitet haben.

(k) (4 Pkt.) Zeigen Sie, dass im Fall von frustrierter Totalreflexion die Gesamttransmission $|t_{\text{ges}}|^2$ für Schichtdicken $d \gtrsim \lambda_0$ näherungsweise exponentiell abfällt mit

$$|t_{\text{ges}}|^2 = |t_{12}|^2\,|t_{21}|^2\,\mathrm{e}^{-2|k_{z2}|d}. \tag{25}$$

Lösung:
Im Falle von TIR und FTIR ist $k_{z2} = \mathrm{i}\,|k_{z2}|$ rein imaginär. Wir erhalten so

$$t_{\text{ges}} = \frac{t_{12}t_{21}\mathrm{e}^{-|k_{z2}|d}}{1 - r_{21}^2\mathrm{e}^{-2|k_{z2}|d}} \approx t_{12}t_{21}\mathrm{e}^{-|k_{z2}|d}(1 + r_{21}^2\mathrm{e}^{-2|k_{z2}|d}) \tag{26}$$

und somit in erster Näherung

$$|t_{\mathrm{ges}}|^2 = |t_{12}|^2 \, |t_{21}|^2 \, \mathrm{e}^{-2|k_{z2}|d}. \tag{27}$$

(l) (6 Pkt.) Erstellen Sie einen Graphen von $|t_{\mathrm{ges}}|^2$ als Funktion der Filmdicke in Einheiten der Vakuumwellenlänge d/λ_0 für die drei Einfallswinkel $\theta_1 = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$. Beschriften Sie Ihre Achsen und erstellen Sie eine aussagekräftige Legende sowie einen Titel. Nehmen Sie einen Vakuumspalt an, der von Glas mit den Materialparametern $\varepsilon_1 = 2.25$ und $\mu_1 = 1$ umgeben ist. In welchem Winkelbereich zeigt der Film Fabry-Pérot Resonanzen und in welchem Winkelbereich beobachten Sie frustierte Totalreflexion?

Lösung:

In Abb. 2 ist die Transmission durch den Film in Abhängigkeit von der Filmdicke für verschie-

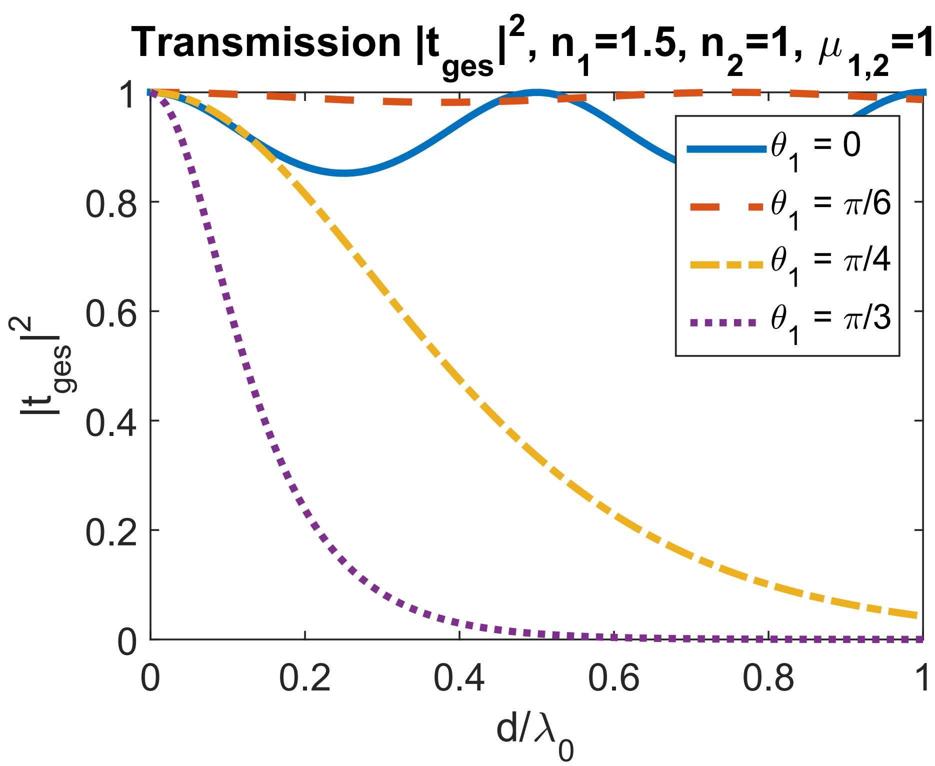

Abbildung 2: Transmission durch einen Vakuumspalt der Dicke d, der von Glas mit Materialkonstanten $\varepsilon_1 = 2.25$ und $\mu_1 = 1$ umgeben ist.

dene Winkel gezeigt. Für Winkel kleiner als der kritische Winkel $\sin^{-1}(n_2/n_1) = 42°$ zeigt der Vakuumspalt Fabry-Perot Resonanzen. Für Winkel grösser als der kritische Winkel beobachten wir frustrierte Totalreflexion mit dem charakteristischen exponentiellen Abfall der Transmission mit zunehmender Filmdicke d.

(m) (2 Pkt.) Argumentieren Sie, warum der Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche im Medium 2, also $\langle \mathbf{S}_2(\mathbf{r}) \rangle_z$, auch im Falle von Totalreflexion endlich sein muss. In der Aufgabe (f) haben Sie

gezeigt, dass im Falle von Totalreflexion durch die evaneszente Welle auf der Seite des optisch dünneren Mediums keinerlei Energie normal zur Grenzfläche transportiert wird. Nun haben wir jedoch für den Fall frustrierter Totalreflexion gefunden, dass aufgrund der Energieerhaltung im Medium 2 ein endlicher Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche bestehen muss. Innerhalb der Schicht ist jedoch die Wellenzahl k_{z2} zweifelsohne noch stets imaginär und die Felder in der Schicht darum senkrecht zur Grenzfläche evaneszent. Wie kann plötzlich doch durch den Spalt der Dicke d Energie fliessen, wenn darin nur evaneszente Felder bestehen?
Hinweis: Gehen Sie in Ihrer Argumentation (ohne Rechnung) auf die (Nicht-)Linearität des Poynting Vektors bezüglich der Felder und daraus resultierende Interferenzeffekte ein.

Lösung:
In der Tat transportiert eine einzelne evaneszente Welle, die von einer Grenzfläche exponentiell abfällt, keinerlei Energie. Im Falle der frustrierten Totalreflexion wird die evaneszente Welle jedoch an der nächsten Grenzfläche wieder reflektiert, so dass das Feld im Spalt eine Superposition zweier evaneszenter Felder ist. Eines dieser Felder fällt exponentiell von der ersten Grenzfläche ab, das andere fällt exponentiell von der anderen Grenzfläche ab. Der Poynting Vektor ist nicht linear in den Feldern, so dass sich durch Superposition von Feldern Interferenzterme ergeben. Die Superposition zweier evaneszenter Felder kann nun offenbar eine endliche Komponente des Poynting Vektors normal zu den Grenzflächen besitzen. Während also der Poynting Vektor einer einzelnen evaneszenten Welle senkrecht zur Grenzfläche verschwindet, hat die Superposition zweier solcher Wellen durch Interferenz eine endliche Komponente.

2 Elektromagnetische Welle im Medium (50 Pkt.)

In der Vorlesung haben wir gefunden, dass zeitharmonische Felder in homogenen Medien ebenso wie im Vakuum als Superposition ebener Wellen geschrieben werden können, es ist lediglich die Dispersionsrelation durch den Brechungsindex n zu korrigieren. Dieser Umstand beruht auf der Tatsache, dass ein elektromagnetisches Feld in einem homogenen Medium eine Polarisation erzeugt, die wiederum elektromagnetische Felder abstrahlt. In dieser Aufgabe leiten wir die Dispersionsrelation im Medium (exemplarisch im Fall $\mu = 1$) erneut her, indem wir explizit die Felder betrachten, die durch die zeitharmonische Polarisierung eines Mediums generiert werden. Bei dieser Gelegenheit üben wir zugleich den Umgang mit den elektromagnetischen Potentialen.
Wir beginnen mit den mikroskopischen Maxwell-Gleichungen, die lauten

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{\text{tot}}/\varepsilon_0, \tag{28}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{29}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \tag{30}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j}_{\text{tot}}. \tag{31}$$

Ausserdem verwenden wir das skalare Potential ϕ und das Vektorpotential $\mathbf{A}$, aus denen sich die Felder berechnen lassen, wie in der Vorlesung behandelt.

(a) (6 Pkt.) Verwenden Sie die Lorenzeichung, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben, um die folgenden Wellengleichungen für die Potentiale herzuleiten

$$\nabla^2 \mathbf{A}_L - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_L}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{tot}}, \tag{32}$$

$$\nabla^2 \phi_L - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi_L}{\partial t^2} = -\rho_{\text{tot}}/\varepsilon_0. \tag{33}$$

Lösung:
In der Lorenzeichung gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_L = -\frac{1}{c^2}\partial_t \phi_L. \tag{34}$$

Die Felder ergeben sich aus den Potentialen

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \tag{35}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{36}$$

Wir bilden die Rotation von Gl. (36) und erhalten mit Gl. (30) und Gl. (34)

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_L, \\
\frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j}_{\text{tot}} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_L, \\
-\nabla \frac{1}{c^2}\partial_t \phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{A}_L + \mu_0 \mathbf{j}_{\text{tot}} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}_L, \\
\nabla^2 \mathbf{A}_L - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_L}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{tot}}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Wir bilden die Divergenz von Gl. (35) und erhalten mit Gl. (28) und Gl. (34)

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= -\nabla^2 \phi_L - \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A}_L, \\
\nabla^2 \phi_L - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi_L &= -\frac{\rho_{\mathrm{tot}}}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

(b) (5 Pkt.) Wir führen nun den elektrischen Hertz-Vektor $\boldsymbol{\pi}_e$ und den magnetischen Hertz-Vektor $\boldsymbol{\pi}_m$ ein, die wir über folgende Gleichungen definieren

$$
\phi_L = -\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e, \tag{39}
$$

$$
\mathbf{A}_L = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_e}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{\pi}_m. \tag{40}
$$

Wir betrachten im Folgenden ein System ohne freie Ladungen (es existieren also lediglich Polarisationsladungen) und ohne freie Ströme und Leitungsströme (es existieren also lediglich Polarisationsströme und Magnetisierungsströme). Zeigen Sie, dass im betrachteten System die Hertz'schen Vektoren $\boldsymbol{\pi}_m$ und $\boldsymbol{\pi}_e$ die inhomogenen Wellengleichungen erfüllen

$$
\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}_e}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P}, \tag{41}
$$

$$
\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_m - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{M}. \tag{42}
$$

Lösung:
Wir wissen aus der Vorlesung

$$
\rho_{\mathrm{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \tag{43}
$$

$$
\mathbf{j}_{\mathrm{tot}} = \mathbf{j}_{\mathrm{pol}} + \mathbf{j}_{\mathrm{mag}} = \partial_t \mathbf{P} + \nabla \times \mathbf{M}. \tag{44}
$$

Einsetzen der Gl. (39) in die Wellengleichung liefert

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \phi_L - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_{\mathrm{tot}}}{\varepsilon_0}, \\
-\nabla^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e &= \nabla \cdot \mathbf{P}/\varepsilon_0, \\
\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_e - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \boldsymbol{\pi}_e &= -\mathbf{P}/\varepsilon_0.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Einsetzen der Gl. (42) in die Wellengleichung ergibt

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{A}_L - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j}_{\mathrm{tot}}, \\
\frac{1}{c^2} \partial_t \left[\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_e - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \boldsymbol{\pi}_e \right] + \nabla \times \left[\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_m - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \boldsymbol{\pi}_m \right] &= -\mu_0 \left[\partial_t \mathbf{P} + \nabla \times \mathbf{M} \right] \\
\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_m - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \boldsymbol{\pi}_m &= -\mu_0 \mathbf{M},
\end{aligned}
\tag{46}
$$

wobei wir im letzten Schritt das Ergebnis aus Gl. (45) und die Definition der Lichtgeschwindigkeit verwendet haben.

(c) (5 Pkt.) Zeigen Sie, dass sich die Felder aus den Hertz'schen Vektoren und den Quellen berechnen nach

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\pi}_e - \nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_m}{\partial t} - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}, \tag{47}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\pi}_m + \nabla \times \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{\pi}_e}{\partial t}. \tag{48}$$

Lösung:
Wir beginnen mit Gl. (35), verwenden Gln. (39) und (40), sowie die Vektoridentität $\nabla \times \nabla \times = \nabla\nabla \cdot -\nabla^2$ und die Wellengleichung (41)

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A} &= \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \boldsymbol{\pi}_e - \partial_t \nabla \times \boldsymbol{\pi}_m \\ &= \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\pi}_e + \nabla^2 \boldsymbol{\pi}_e - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \boldsymbol{\pi}_e - \partial_t \nabla \times \boldsymbol{\pi}_m \\ &= \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\pi}_e - \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P} - \partial_t \nabla \times \boldsymbol{\pi}_m.\end{aligned} \tag{49}$$

Ebenso erhalten wir aus Gl. (36) mit Gl. (40) den gesuchten Ausdruck für das Magnetfeld.

(d) (2 Pkt.) Wir können für zeitharmonische Felder zu komplexen Hertz'schen Vektoren übergehen, so dass gilt $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}$. Zeigen Sie, dass die komplexen Hertz'schen Vektoren die inhomogenen Helmholtzgleichungen erfüllen

$$\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_e + k_0^2 \boldsymbol{\pi}_e = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P}, \tag{50}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_m + k_0^2 \boldsymbol{\pi}_m = -\mu_0 \mathbf{M}, \tag{51}$$

mit der Wellenzahl im Vakuum k_0.

Lösung:
Im zeitharmonischen Falle gilt für die Zeitableitungen $\partial_t^2 \boldsymbol{\pi} = -\omega^2 \boldsymbol{\pi}$ und somit gilt die Helmholtzgleichung.

(e) (4 Pkt.) Für die zeitharmonischen Hertz'schen Vektoren gilt also die inhomogene Helmholtzgleichung mit der Vakuumwellenzahl k_0. Sie kennen die Green'sche Funktion $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ der Helmholtzgleichung aus der Vorlesung. Wir beschränken uns für den Rest dieser Aufgabe auf ein Medium, das keinerlei Magnetisierung zeigt, so dass wir im Folgenden lediglich den elektrischen Hertz'schen Vektor zu betrachten haben. Zeigen Sie, dass für den elektrischen Hertz'schen Vektor gilt

$$\boldsymbol{\pi}_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V' \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{P}(\mathbf{r}'). \tag{52}$$

Lösung:
Die Lösung der Helmholtzgleichung für die Hertz'schen Vektoren erhalten wir aus der Green'schen Funktion

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{53}$$

die gerade die Helmholtzgleichung

$$[\nabla^2 + a^2]G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{54}$$

erfüllt. Somit gilt (in unserem Fall ist $a = k_0$)

$$\boldsymbol{\pi}_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V' \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{P}(\mathbf{r}'). \tag{55}$$

(f) (8 Pkt.) Wir nehmen nun eine Polarisation in der Form einer in positive z-Richtung propagierenden ebenen Welle bei Frequenz ω an. Die räumliche Periodizität der Polarisation sei bestimmt durch ihre (bislang unbekannte) Wellenzahl k, so dass gilt $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$. Ausserdem sei die Polarisation transversal, so dass der Polarisationsvektor $\mathbf{P}_0$ senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung steht. Unser Ziel im Folgenden ist, die Wellenzahl k in Abhängigkeit von der Frequenz ω (bzw. der Vakuumwellenzahl k_0) zu bestimmen.
Verwenden Sie die Substitution $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}$ um folgenden Ausdruck für den Hertz'schen Vektor herzuleiten

$$\boldsymbol{\pi}_e(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{2\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z'-z)} \int_{|z-z'|}^{\infty} \mathrm{d}R \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0R}. \tag{56}$$

Lösung:
Wir schreiben das Integral aus in der Form

$$\boldsymbol{\pi}_e(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}z' \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z'-z)} \iint \mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{57}$$

Nun substituieren wir $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} = \sqrt{\rho^2+(z-z')^2}$. Mit $\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi$ erhalten wir

$$\boldsymbol{\pi}_e(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{2\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z'-z)} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\rho \, \rho\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0R}}{R}. \tag{58}$$

Ausserdem gilt $R\mathrm{d}R = \rho\mathrm{d}\rho$ und so finden wir

$$\boldsymbol{\pi}_e(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{2\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z'-z)} \int_{|z-z'|}^{\infty} \mathrm{d}R \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0R}. \tag{59}$$

(g) (2 Pkt.) Berechnen Sie das letzte Integral in Gl. (56), indem Sie folgenden Grenzwert betrachten

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{|z-z'|}^{\infty} \mathrm{d}R \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0R}\mathrm{e}^{-\lambda R}. \tag{60}$$

Hinweis: Diese Vorgehensweise ist mathematisch nicht völlig einwandfrei, führt aber in unserem Falle zuverlässig zum Ziel. Verwechseln Sie den hier eingeführten Parameter λ nicht mit der Wellenlänge!

Lösung:
Um das letzte Integral auszuwerten, bilden wir den Grenzwert

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{|z-z'|}^{\infty} \mathrm{d}R \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0R}\mathrm{e}^{-\lambda R} = \frac{\mathrm{i}}{k_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|z'-z|}, \tag{61}$$

denn es gilt

$$\int_{|z-z'|}^{\infty} \mathrm{d}R \, \mathrm{e}^{-R(\lambda-\mathrm{i}k_0)} = -\frac{1}{\lambda-\mathrm{i}k_0} \mathrm{e}^{-R(\lambda-\mathrm{i}k_0)} \Big|_{|z-z'|}^{\infty} = -\frac{1}{\lambda-\mathrm{i}k_0} \left[0 - \mathrm{e}^{-|z-z'|(\lambda-\mathrm{i}k_0)}\right]$$
$$\xrightarrow{\lambda\to 0} \frac{\mathrm{i}}{k_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|z-z'|}. \tag{62}$$

Jedes Integral vom Typ $\int_a^\infty \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ kann so durch Einführung des Grenzwertes $\lim_{\lambda\to 0} \int_a^\infty \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{(\mathrm{i}k-\lambda)x}$ berechnet werden.

(h) (10 Pkt.) Zeigen Sie, dass der elektrische Hertz'sche Vektor lautet

$$\boldsymbol{\pi}_e(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{\varepsilon_0(k^2-k_0^2)}. \tag{63}$$

Hinweis: Spalten Sie das zu berechnende Integral geeignet auf, um den Betrag im Integranden loszuwerden. Wenden Sie weiterhin den Grenzwert aus Teilaufgabe (g) an.

Lösung:
Mit dem in der letzten Teilaufgabe ausgewerteten Integral finden wir

$$\boldsymbol{\pi}_e(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{i}\mathbf{P}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{2k_0\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z'-z)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|z'-z|}. \tag{64}$$

Wir spalten das Integral auf und erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z'-z)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|z'-z|} = \int_{-\infty}^{z} \mathrm{d}z' \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z'-z)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(z-z')} + \int_{z}^{\infty} \mathrm{d}z' \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z'-z)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(z'-z)}$$
$$= \frac{2k_0}{\mathrm{i}(k^2-k_0^2)}, \tag{65}$$

wobei wir wieder den Grenzwert aus Gl. (61) angewendet haben. Für den Hertz'schen Vektor finden wir so

$$\boldsymbol{\pi}_e(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{\varepsilon_0(k^2-k_0^2)}. \tag{66}$$

(i) (4 Pkt.) Berechnen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aus dem Hertz'schen Vektor.
Hinweis: Zeigen Sie, dass der Hertz'sche Vektor $\boldsymbol{\pi}_e$ divergenzfrei ist und verwenden Sie diese Tatsache zusammen mit der inhomogenen Helmholtzgleichung, um Ihre Rechnung zu vereinfachen.

Lösung:
Wir berechnen das zu diesem Hertz'schen Vektor gehörige elektrische Feld laut Gl. (47) und finden dank der verschwindenden Magnetisierung

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\pi}_e - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \\ &= \nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}_e - \nabla^2\boldsymbol{\pi}_e - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \\ &= k_0^2\boldsymbol{\pi}_e = \frac{k_0^2}{k^2-k_0^2}\frac{\mathbf{P}_0}{\varepsilon_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}.\end{aligned} \tag{67}$$

In den beiden letzten Schritten haben wir die Divergenzfreiheit von $\boldsymbol{\pi}_e$ benutzt, sowie die inhomogene Helmholtzgleichung Gl. (50). Die Divergenzfreiheit folgt aus der Tatsache, dass $\mathbf{P}_0$ senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung entlang z steht.

(j) (4 Pkt.) Nehmen Sie an, dass ein linearer Zusammenhang zwischen der Polarisation und dem elektrischen Feld besteht von der Form $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$. Zeigen Sie, dass damit für die Wellenzahl im Medium k gilt

$$k^2 = (1+\chi)k_0^2. \tag{68}$$

Welcher Zusammenhang besteht folglich zwischen dem Brechungsindex n eines nicht magnetisierbaren Mediums und seiner Suszeptibilität χ?

Lösung:
Es muss gelten

$$\mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} = \frac{k_0^2}{k^2 - k_0^2} \chi \mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}. \tag{69}$$

Hieraus folgt für die Wellenzahl des Feldes im Medium

$$k^2 = (1+\chi)k_0^2. \tag{70}$$

Im nicht magnetisierbaren Medium gilt $\mu = 1$ und somit $n = \sqrt{\varepsilon}$. Nun haben wir gefunden $n = \sqrt{1+\chi}$ und somit wie erwartet $\varepsilon = 1 + \chi$.