Übung 6

Abgabe: 05.04. bzw. 09.04.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Energietransport durch elektromagnetische Felder

1 Die Skin-Eindringtiefe im guten Leiter (40 Pkt.)

Viele Probleme des Elektromagnetismus lassen sich analytisch lösen, indem man involvierte Materialien als perfekte Leiter modelliert. An einem idealen Leiter werden elektromagnetische Felder perfekt reflektiert und dringen nicht in den Leiter ein. In reale Materialien mit endlicher Leitfähigkeit können elektromagnetische Felder jedoch bis zur charakteristischen "Skin-Tiefe" eindringen. Dieser Umstand führt einerseits zu Ohm'schen Verlusten. Andererseits wird die Skin-Eindringtiefe relevant, wenn die betrachteten Strukturgrössen vergleichbar werden mit der Skin-Tiefe. Beispielsweise besitzt ein Metallfilm mit einer Dicke vergleichbar mit der Skin-Tiefe eine endliche Transparenz.

In dieser Aufgabe stellen wir einen Zusammenhang her zwischen der Skin-Tiefe, der Wellenlänge elektromagnetischer Strahlung und der frequenzabhängigen Leitfähigkeit eines Materials.

(a) (4 Pkt.) Verwenden Sie die konstituierenden Relationen

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}, \tag{1}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \tag{2}$$

mit der reellen Permittivität ε_r, um aus den Maxwell-Gleichungen zusammen mit der Definition der Leitfähigkeit $\mathbf{j}_{\mathrm{cond}} = \sigma \mathbf{E}$ die komplexe Permittivität

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \frac{\mathrm{i}\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \tag{3}$$

herzuleiten.

Lösung:
Durch Manipulation der Maxwell-Gleichung für das $\mathbf{H}$-Feld erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= -\mathrm{i}\omega \mathbf{D} + \mathbf{j}_{\mathrm{cond}} \\ &= -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 \left[\varepsilon_r + \frac{\mathrm{i}\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right] \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir definieren das komplexe ε als

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \frac{\mathrm{i}\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \tag{5}$$

(b) (4 Pkt.) Verwenden Sie den Ansatz für eine ebene Welle im quellfreien Raum mit Brechungsindex n, um aus den Maxwell-Gleichungen die Dispersionsrelation herzuleiten

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{6}$$

Lösung:
Wir wenden den Rotationsoperator auf die Maxwell-Gleichung für die Rotation des elektrischen Feldes an und erhalten mit der Gleichung für die Rotation des Magnetfeldes und der Definition der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ und des Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \mathrm{i}\omega\mu_0\mu\nabla \times \mathbf{H}, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \omega^2 \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \mathbf{E}, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{7}$$

Mit dem Ansatz für die ebene Welle $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}}$ und der Quellfreiheit $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ erhalten wir

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\ \mathbf{E} = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}. \tag{8}$$

Es gilt somit die Dispersionsrelation

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{9}$$

(c) (4 Pkt.) Mit der Definition des Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ ergibt sich für komplexes ε ein komplexer Brechungsindex $n = n' + \mathrm{i}n''$. Zeigen Sie, dass der Imaginärteil des Brechungsindex für ein exponentielles Abfallen des Feldes einer ebenen Welle verantwortlich ist.

Lösung:
Für das Feld einer ebenen Welle ergibt sich mit dem komplexen Brechungsindex

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathbf{n}_k \mathbf{r} \frac{\omega}{c} n''} \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\omega}{c} n' \mathbf{n}_k \mathbf{r}\right)\right], \tag{10}$$

wobei wir den komplexen Wellenvektor geschrieben haben als $\mathbf{k} = n\frac{\omega}{c}\mathbf{n}_k$.

(d) (8 Pkt.) Zeigen Sie, dass für den Realteil n' und und den Imaginärteil n'' des komplexen Brechungsindex gilt

$$n' = \sqrt{A\left[\sqrt{1+B} + 1\right]}, \tag{11}$$

$$n'' = \sqrt{A\left[\sqrt{1+B} - 1\right]}, \tag{12}$$

wobei A und B von Ihnen zu bestimmen sind. Begründen Sie die Wahl Ihrer Vorzeichen.

Lösung:
Laut Definition gilt für den Brechungsindex

$$n^2 = \mu\left(\varepsilon_r + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right). \tag{13}$$

Ausserdem gilt

$$n^2 = (n' + \mathrm{i}n'')^2 = n'^2 - n''^2 + 2\mathrm{i}n'n'', \tag{14}$$

woraus folgt

$$n'^2 - n''^2 = \mu\varepsilon_r. \tag{15}$$

$$2n'n'' = \frac{\mu\sigma}{\varepsilon_0\omega}. \tag{16}$$

Lösen der sich ergebenden quadratischen Gleichungen ergibt

$$n'^2 = \frac{\mu\varepsilon_r}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}\right)^2}\right], \tag{17}$$

$$n''^2 = \frac{\mu\varepsilon_r}{2}\left[-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}\right)^2}\right]. \tag{18}$$

Da wir an physikalischen Lösungen interessiert sind, und somit in Propagationsrichtung exponentiell anwachsende Felder ausschliessen, wählen wir jeweils das positive Vorzeichen und finden so

$$n' = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon_r}{2}}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}\right)^2} + 1\right]^{1/2}, \tag{19}$$

$$n'' = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon_r}{2}}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}\right)^2} - 1\right]^{1/2}. \tag{20}$$

Korrekterweise ergibt sich im Grenzfall $\sigma = 0$ gerade $n = n' = \sqrt{\varepsilon_r\mu}$ und $n'' = 0$.

(e) (4 Pkt.) Begründen Sie, warum im Falle guter Leiter gilt $n' \approx n''$. Berechnen Sie k_{z2} im guten Leiter und argumentieren Sie, warum die in den Leiter gebrochene Welle entlang dem Lot propagiert. Die Grenzfläche stehe hier senkrecht zur z-Achse.

Lösung:
Für gute Leiter gilt $n' \approx n'' \approx \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\varepsilon_0\omega}}$ und $n^2 \approx 2\mathrm{i}n'^2$. Da für gute Leiter gilt $k_{z2} \gg k_x$, ist die Brechung in den Leiter stets entlang des Lotes. Ausserdem gilt dann im Leiter $k_{z2} \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{2\mathrm{i}}n' = \frac{\omega}{c}n'(\mathrm{i}+1)$.

(f) (8 Pkt.) Drücken Sie n' für einen guten Leiter aus durch die Vakuumwellenlänge λ bei Frequenz ω und die Skin-Eindringtiefe

$$\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\mu\sigma\omega}}. \tag{21}$$

Erstellen Sie einen Graphen der reellen elektrischen Feldamplitude einer in einen guten Leiter eindringenden ebenen Welle zum Zeitpunkt $t = 0$ für reelles $\mathbf{E}_0$ als Funktion der Eindringtiefe z normiert durch die Skin-Tiefe $\delta(\omega)$.
Hinweis: Ein geeigneter Wertebereich für die Abszisse ist $z/\delta(\omega) = 0 \ldots 2\pi$. Normieren Sie

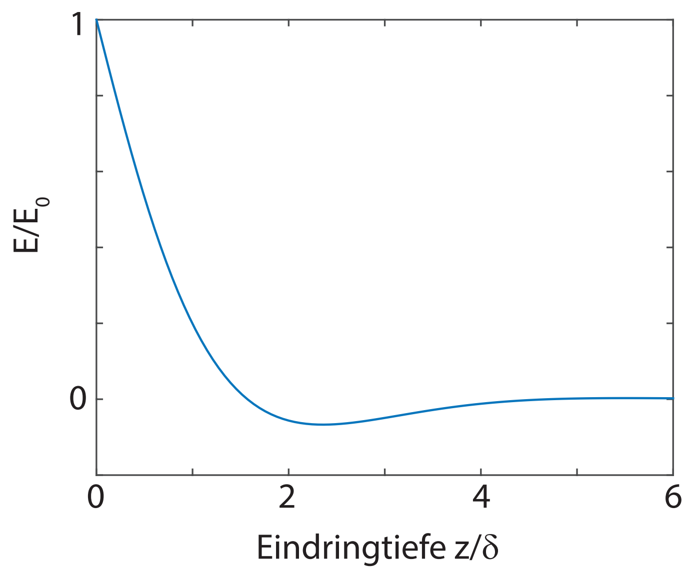
die Ordinate geeignet und beschriften Sie Ihre Achsen aussagekräftig und, sofern notwendig, mit Einheiten.

Lösung:
Wir können Real- und Imaginärteil des Brechungsindex eines guten Leiters ausdrücken durch

$$n' \approx n'' = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\varepsilon_0\omega}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\lambda}{\delta(\omega)}. \tag{22}$$

Für das elektrische Feld in einem guten Leiter gilt somit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t=0) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}}\right\} = \mathbf{E}_0\mathrm{e}^{-n''\frac{\omega}{c}z}\cos\left(n'\frac{\omega}{c}z\right) = \mathbf{E}_0\mathrm{e}^{-z/\delta}\cos(z/\delta). \tag{23}$$



(g) (8 Pkt.) Zeigen Sie, dass für den Intensitätsreflexionskoeffizienten $R^{(i)} = \left|r^{(i)}\right|^2$ (mit $i \in \{\mathrm{s}, \mathrm{p}\}$) für normalen Einfall von einem Dielektrikum mit Permittivität $\varepsilon_1 = n_1^2$ und Permeabilität $\mu_1 = 1$ in ein Metall mit guter Leitfähikeit σ und reeller Permittivität ε_r, sowie Permeabilität $\mu = 1$, in erster Näherung die Hagen-Rubens-Relation gilt

$$R \approx 1 - 2\frac{n_1}{n'} = 1 - \sqrt{\frac{8\varepsilon_1\varepsilon_0\omega}{\sigma}}. \tag{24}$$

Machen Sie sich klar, warum gute Leiter einen metallischen Glanz besitzen.

Lösung:
Wir betrachten den Fresnelkoeffizienten

$$r^{(s)} = \frac{k_{z1} - k_{z2}}{k_{z1} + k_{z2}}. \tag{25}$$

Für normalen Einfall gilt somit

$$r^{(s)} = \frac{n_1\frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{c}n'(\mathrm{i}+1)}{n_1\frac{\omega}{c} + \frac{\omega}{c}n'(\mathrm{i}+1)}. \tag{26}$$

Für den Intensitätsreflexionskoeffizienten gilt dann die Hagen-Rubens Relation

$$R^{(s)} = \left|r^{(s)}\right|^2 = \frac{\left(\frac{n_1}{n'} - 1\right)^2 + 1}{\left(\frac{n_1}{n'} + 1\right)^2 + 1} \approx 1 - 2\frac{n_1}{n'} = 1 - \sqrt{\frac{8\varepsilon_1\varepsilon_0\omega}{\sigma}}. \tag{27}$$

Betrachtung von $r^{(p)}$ führt auf dieselbe Relation. Die Hagen-Rubens Relation besagt, dass gute Leiter elektromagnetische Wellen gut reflektieren. Dies erklärt den metallischen Glanz guter Leiter.

2 Absorption in einem metallischen Leiter (35 Pkt.)

In der vorhergehenden Aufgabe haben wir festgestellt, dass eine elektromagnetische Welle in einem Leiter mit endlicher Leitfähigkeit exponentiell gedämpft wird. Die Dämpfung kommt durch die Absorption elektromagnetischer Energie durch die endliche Leitfähigkeit und die resultierenden Ohm'schen Verluste zustande. In dieser Aufgabe überzeugen wir uns, dass die ins Metall hineinpropagierende Energie komplett in Ohm'sche Verluste im Material umgesetzt wird und somit Energieerhaltung gilt.

Hierzu verifizieren wir das Poynting-Theorem für eine ebene Welle, die in einem guten metallischen Leiter in Richtung der z-Achse propagiert. Der Leiter sei charakterisiert durch μ (reell und positiv) und $\varepsilon = \varepsilon' + \mathrm{i}\sigma/(\omega\varepsilon_0)$, mit der Leitfähigkeit σ. Es dominiere der Imaginärteil der Permittivität, so dass gilt $\varepsilon \approx \mathrm{i}\sigma/(\omega\varepsilon_0)$. Die elektrische Feldamplitude bei $z = 0$ laute $\mathbf{E}_0$ und sei reell.
Hinweis: Verwenden Sie im Folgenden den Parameter $\beta = (1/c)\sqrt{\mu\sigma\omega/(2\varepsilon_0)}$, um Ihre Lösungen übersichtlich zu gestalten.

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie den $\mathbf{k}$-Vektor der ebenen Welle unter Verwendung des Parameters β.
Hinweis: Es gilt $\sqrt{\mathrm{i}} = (1 + \mathrm{i})/\sqrt{2}$.

Lösung:
Für den Wellenvektor gilt (2 Pkt.)

$$\mathbf{k} \;=\; (\omega/c)\sqrt{\mu\varepsilon}\,\mathbf{n}_z \;=\; (1/c)\sqrt{\mu\sigma\omega/\varepsilon_0}\,\mathbf{n}_z\,(1+\mathrm{i})/\sqrt{2} \;\equiv\; (1+\mathrm{i})\,\beta\,\mathbf{n}_z\,, \tag{28}$$

mit $\beta = (1/c)\sqrt{\mu\sigma\omega/(2\varepsilon_0)}$.

(b) (2 Punkte) Formulieren Sie das reelle elektrische Feld $\mathbf{E}(z,t)$.

Lösung:
Für die Felder der ebenen Welle gilt

$$\mathbf{E}(z,t) \;=\; \mathrm{Re}\{\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}\} \;=\; \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{-\beta z}\cos[\beta z - \omega t]. \tag{29}$$

(c) (6 Punkte) Berechnen Sie das magnetische Feld $\mathbf{H}(z,t)$ und bestimmen Sie die Phasenverschiebung zwischen elektrischem und magnetischem Feld.

Lösung:
Das magnetische Feld errechnet sich aus dem elektrischen Feld

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(z,t) \;&=\; \mathrm{Re}\{\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_0\mu}\mathrm{i}\mathbf{k}\times[\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}]\} \;=\; [\mathbf{n}_z\times\mathbf{E}_0]\;c\sqrt{\frac{\sigma\varepsilon_0}{2\,\omega\mu}}\,\mathrm{e}^{-\beta z}\,\mathrm{Re}\{(1+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z-\mathrm{i}\omega t}\}\\ &=\; [\mathbf{n}_z\times\mathbf{E}_0]\;c\sqrt{\frac{\sigma\varepsilon_0}{\omega\mu}}\;\mathrm{e}^{-\beta z}\;\cos[\beta z - \omega t + \pi/4].\end{aligned}$$

Die Phasenverschiebung ist durch den Faktor $(1+\mathrm{i})/\sqrt{2} = \exp[\mathrm{i}\pi/4]$ bestimmt und beträgt $\Delta\phi = \pi/4 = 45^\circ$.

(d) (5 Punkte) Bestimmen Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor $\langle\mathbf{S}\rangle$ der betrachteten ebenen Welle.

Lösung:
Es ergibt sich

$$\langle\mathbf{S}\rangle \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\} \;=\; \frac{1}{2}|\mathbf{E}_0|^2\, c\sqrt{\frac{\sigma\varepsilon_0}{2\omega\mu}}\;\mathrm{e}^{-2\beta z}\,\mathbf{n}_z. \tag{30}$$

(e) (3 Punkte) Berechnen Sie den Leistungsfluss $\mathbf{P}_S$ der ebenen Welle durch eine Fläche A, die bei $z=0$ senkrecht zur z-Achse steht.

Lösung:
Der Leistungsfluss ergibt sich zu

$$\mathrm{P_S} \;=\; \int_A \langle\mathbf{S}(z=0)\rangle\cdot\mathbf{n}_z\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;=\; A\,|\mathbf{E}_0|^2\,\frac{c}{2}\sqrt{\frac{\sigma\varepsilon_0}{2\omega\mu}} \;=\; A\,\frac{\sigma}{4\beta}|\mathbf{E}_0|^2. \tag{31}$$

Wir haben soeben die Leistung berechnet, die mit der elektromagnetischen Welle ins Metall eindringt. Im Folgenden bestätigen wir das Poynting'sche Theorem, indem wir jene Leistung berechnen, die das Feld der ebenen Welle an den induzierten Polarisationsströmen verrichtet, was gerade der in Ohm'sche Verluste umgesetzten Energie entspricht.

(f) (5 Punkte) Drücken Sie das Polarisationsfeld $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ im metallischen Medium aus durch das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, die Leitfähigkeit σ, die Kreisfrequenz ω, sowie konstante Faktoren.

Lösung:
Für die komplexen Amplituden gilt

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) \;=\; \varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r})+\mathbf{P}(\mathbf{r}) \;=\; \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{32}$$

und somit

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \;=\; \varepsilon_0(\varepsilon-1)\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; -\varepsilon_0(1-\frac{\mathrm{i}\sigma}{\omega\varepsilon_0})\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{33}$$

wobei

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} \quad \text{und} \quad k=(1+\mathrm{i})\,\beta\;.$$

Das reelle Polarisationsfeld wird dann

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathrm{Re}\{\mathbf{P}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\}. \tag{34}$$

(g) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Polarisationsstromdichte lautet

$$\mathbf{j}_\mathrm{p}(\mathbf{r},t)=\mathrm{Re}\{[\mathrm{i}\omega\varepsilon_0+\sigma]\,\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}\}\;. \tag{35}$$

Lösung:
Die Polarisationsstromdichte ergibt sich aus dem Polarisationsfeld laut

$$\mathbf{j}_\mathrm{p}(\mathbf{r},t)=\partial\mathbf{P}(\mathbf{r},t)\,/\,\partial t \;=\; \mathrm{Re}\{-\mathrm{i}\omega\mathbf{P}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\}\;. \tag{36}$$

Wir erhalten so für die Polarisationsstromdichte

$$\mathbf{j}_\mathrm{p}(\mathbf{r},t)=\mathrm{Re}\{[\mathrm{i}\omega\varepsilon_0+\sigma]\,\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}\}\;. \tag{37}$$

(h) (6 Punkte) Berechnen Sie die mittlere Leistung (pro Einheitsfläche A) P_{abs}, die in Joule'sche Wärme umgesetzt wird. Betrachten Sie hierzu die Leistung, die das Feld der ebenen Welle an der Polarisationsstromdichte vollbringt.
Hinweis: Der Leiter erstrecke sich über den gesamten Halbraum $z > 0$.

Lösung:
Für zeitharmonische Felder in linearen Medien gilt das zeitgemittelte Poyntingtheorem

$$\int_{\partial V} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \int_V \mathrm{Re}\{\mathbf{j}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})\} \mathrm{d}V. \tag{38}$$

Wir berechnen die im Volumen V erzeugte oder dissipierte Leistung nach der rechten Seite des Poynting-Theorems

$$\begin{aligned} \mathrm{P_V} &= -\int_V \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{\mathbf{j}_\mathrm{p}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})\} \, \mathrm{d}V \;=\; -\int_V \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{[\sigma - \mathrm{i}\omega\varepsilon_0] \, |\mathbf{E}_0|^2 \; \mathrm{e}^{-2\mathrm{Im}\{k\}z} \,\} \, \mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{2}\sigma \, |\mathbf{E}_0|^2 \, A \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\beta z} \, \mathrm{d}z \;=\; -A \, \frac{\sigma}{4\beta} |\mathbf{E}_0|^2. \end{aligned} \tag{39}$$

Die linke Seite des Poynting-Theorems misst den Fluss elektromagnetischer Energie aus dem Volumen V hinaus, ist also positiv, wenn sich im Volumen (netto) eine Quelle befindet und negativ, wenn sich im Volumen V eine Senke (Absorber) befindet. Korrekterweise haben wir für einen Ohm'schen Leiter $\mathrm{P_V} =< 0$ gefunden und es gilt $P_{\mathrm{abs}} = -P_{\mathrm{V}}$.

(i) (2 Punkte) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse für den Leistungsfluss des Poyntingvektors P_S ins Metall aus Teilaufgabe (e) sowie für die im Metall absorbierte Joule'sche Wärme P_{abs} aus Teilaufgabe (h). Ergeben Ihre Resultate Sinn? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:
Wir haben gefunden, dass gilt $P_{\mathrm{abs}} = P_S$. Dieses Ergebnis ergibt Sinn, denn die Energie, die von der ebenen Welle in das Material hinein transportiert wird, wird dort komplett absorbiert.

3 Energietransport durch evaneszente Wellen (25 Pkt.)

Wir haben in der Vorlesung festgestellt, dass evanezente Wellen keine Energie in jener Richtung transportieren, in der sie exponentiell abfallen. Allerdings wissen wir, dass bei frustrierter Totalreflexion Energie über einen kleinen Spalt fliesst, in dem lediglich evaneszente Wellen existieren. In dieser Aufgabe lösen wir diesen scheinbaren Widerspruch auf, indem wir uns überzeugen, dass durch Interferenz gegenläufiger evaneszenter Wellen tatsächlich Energietransport stattfinden kann.

Eine in der xz-Ebene propagierende ebene Welle mit Kreisfrequenz ω falle aus der negativen z-Richtung kommend auf eine Grenzfläche bei $z = -z_0$ ein, an der sie total reflektiert wird. Im Raumbereich $z > -z_0$ befinde sich Vakuum und das Feld dort laute

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \;=\; \mathrm{H}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_z(z+z_0)}\, \mathbf{n}_y \;, \tag{40}$$

wobei H_0 reell sei. Der parallele Wellenvektor k_x sei durch einen effektiven Brechungsindex $n_{\mathrm{eff}} > 1$ und die Wellenzahl im Vakuum $k = \omega/c$ wie folgt bestimmt

$$k_x \;=\; n_{\mathrm{eff}}\, k \;. \tag{41}$$

(a) (3 Punkte) Drücken Sie k_z durch n_{eff} und k aus und argumentieren Sie, warum es sich im Bereich $z > -z_0$ um eine evaneszente Welle handelt.

Lösung:
Laut der Dispersionsrelation gilt

$$k_z \;=\; \sqrt{k^2 - k_x^2} \;=\; k\sqrt{1 - n_{\mathrm{eff}}^2} \;=\; \mathrm{i}k\sqrt{n_{\mathrm{eff}}^2 - 1}\;. \tag{42}$$

Die Wellenzahl k_z ist also rein imaginär, da $n_{\mathrm{eff}} > 1$, und die Welle fällt in z-Richtung exponentiell ab.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ der evaneszenten Welle.

Lösung:
Wir berechnen das elektrische Feld aus der Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \;=\; -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \quad\rightarrow\quad \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon_0}[\mathrm{i}\mathbf{k} \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r})]\;. \tag{43}$$

Es folgt

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \;=\; \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,[-\frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r})] \;=\; \mathrm{H}_0\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\begin{bmatrix} k_z/k \\ 0 \\ -k_x/k \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_z(z+z_0)}\;. \tag{44}$$

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass sowohl das komplexe magnetische Feld $\mathbf{H}_1$ als auch das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}_1$ divergenzfrei sind.

Lösung:
Wir finden

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_1 \;=\; \mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_1 \;=\; 0\;, \quad \text{da} \quad k_y = 0 \quad \text{und} \quad H_{1x} = H_{1z} = 0. \tag{45}$$

Ausserdem gilt

$$\nabla\cdot\mathbf{E}_1 \;=\; \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_1 \;=\; \mathrm{i}[k_x E_{1x} + k_z E_{1z}] \;=\; \mathrm{iH}_0\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,[k_x\frac{k_z}{k} - k_z\frac{k_x}{k}]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_z(z+z_0)} \;=\; 0\,. \quad (46)$$

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass sowohl das komplexe magnetische Feld $\mathbf{H}_1$ als auch das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}_1$ die quellfreie Helmholzgleichung erfüllen.

Lösung:
Die quellfreie Helmholtzgleichung für ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ lautet

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{F} = 0 \quad (47)$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{E}_1 &= -(k_x^2+k_z^2)\mathbf{E}_1 = -k^2\mathbf{E}_1, \quad (48)\\ \nabla^2\mathbf{H}_1 &= -(k_x^2+k_z^2)\mathbf{H}_1 = -k^2\mathbf{H}_1 \quad (49)\end{aligned}$$

und somit ist die Helmholtzgleichung erfüllt.

(e) (4 Punkte) Bestimmen Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor $\langle\mathbf{S}\rangle$ im Bereich $z > -z_0$.

Lösung:
Der zeitgemittelte Poyntingvektor lautet

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_1^*\} &= \frac{1}{2}\mathrm{H}_0^2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\begin{bmatrix} k_x/k \\ 0 \\ \mathrm{Re}\{k_z\}/k\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-2\mathrm{Im}\{k_z\}(z+z_0)}\\ &= \mathrm{H}_0^2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{n_{\mathrm{eff}}}{2}\,\mathrm{e}^{-2k\sqrt{n_{\mathrm{eff}}^2-1}\,(z+z_0)}\,\mathbf{n}_x\,. \quad (50)\end{aligned}$$

(f) (1 Punkt) Berechnen Sie den Leistungsfluss durch eine Fläche A in der Ebene $z = 0$.

Lösung:
Der Energiefluss durch A ist

$$\mathrm{P} \;=\; \int_A \langle\mathbf{S}\rangle\cdot\mathbf{n}_z\,da \;=\; 0 \quad \mathrm{da} \quad \mathbf{n}_x\cdot\mathbf{n}_z = 0\,. \quad (51)$$

Die evaneszente Welle transportiert also keine Energie in z-Richtung. Dem bislang betrachteten evaneszenten Feld werde nun ein zweites evaneszentes Feld überlagert, das jedoch von der Ebene $z = +z_0$ in negative z-Richtung abfalle und weiterhin relativ zum ersten Feld um ϕ phasenverschoben sei. Das magnetische Feld dieser zweiten elektromagnetischen Welle laute im Raumbereich $z < z_0$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \;=\; \mathrm{H}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x - \mathrm{i}k_z(z-z_0)}\,\mathbf{n}_y\,, \quad (52)$$

wobei noch stets $k_x = n_{\mathrm{eff}}\,k$ gelte.

(g) (4 Punkte) Bestimmen Sie das totale elektrische und magnetische Feld im Bereich $-z_0 < z < z_0$.

Hinweis: Ignorieren Sie mögliche Reflexionen an den Grenzflächen.

Lösung:

Es gilt laut dem Superpositionsprinzip

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \;=\; \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}\,\mathrm{H}_0\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z+z_0)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z(z-z_0)}\right]\mathbf{n}_y\;, \tag{53}$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;&=\; \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \;=\; \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,[-\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{H}_1(\mathbf{r})] + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,[-\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{H}_2(\mathbf{r})] \qquad (54)\\ &=\; \mathrm{H}_0\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}\left\{\begin{bmatrix} k_z/k \\ 0 \\ -k_x/k\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z+z_0)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\begin{bmatrix} -k_z/k \\ 0 \\ -k_x/k\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z(z-z_0)}\right\}.\end{aligned}$$

(h) (5 Punkte) Berechnen Sie die z-Komponente des zeitgemittelten Poyntingvektors $\langle S_z\rangle$ für das gesamte Feld.

Lösung:

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\langle S_z\rangle \;&=\; \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{E_x\,H_y^*\} \qquad (55)\\ &=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\mathrm{H}_0^2\,\mathrm{Re}\big\{\mathrm{i}\,\big(\mathrm{Im}\{k_z\}/k\big)\big(\exp[-2\mathrm{Im}\{k_z\}(z+z_0)] - \exp[2\mathrm{Im}\{k_z\}(z-z_0)]\big)\\ &\qquad\qquad + \;\mathrm{i}\,\big(\mathrm{Im}\{k_z\}/k\big)\exp[-2\mathrm{Im}\{k_z\}z_0]\,\big(\exp[-\mathrm{i}\phi] - \exp[\mathrm{i}\phi]\big)\big\}\\ &=\; \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\mathrm{H}_0^2\,\big(\mathrm{Im}\{k_z\}/k\big)\exp[-2\mathrm{Im}\{k_z\}z_0]\,\sin\phi\\ &=\; \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\mathrm{H}_0^2\,\exp\left[-2k\sqrt{n_{\mathrm{eff}}^2-1}\,z_0\right]\sqrt{n_{\mathrm{eff}}^2-1}\;\;\sin\phi\,.\end{aligned}$$

(i) (1 Punkt) Für welche Phasenwinkel ϕ wird der Energiefluss in negativer z-Richtung maximal?

Lösung:

Wir erhalten maximalen Energiefluss in negativer z-Richtung wenn $\sin\phi = -1$ gilt, also

$$\mathrm{P}_\downarrow \,\propto\, -\sin\phi \qquad\rightarrow\qquad \mathrm{Max}\{\mathrm{P}_\downarrow\}:\;\phi = -90^\circ. \tag{56}$$