Übung 5

Abgabe: 29.03. bzw. 2.04.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Felder in Materie und an Grenzflächen

1 Felder und Wellen in Plasmas: Ionosphäre und Metalle (50 Pkt.)

Wir betrachten ein Medium, das aus freien Ladungen besteht (Plasma). Ein einfallendes Feld $\mathbf{E}$ mit Frequenz ω fällt auf dieses Medium ein. Die Wechselwirkung mit einer einzelnen Ladung q führt zur Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\gamma\dot{\mathbf{r}} \;=\; q\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\,, \tag{1}$$

wobei m die Masse des Ladungsträgers bezeichnet und γ ist die Streurate (an anderen Ladungsträgern oder am Gitter). Wäre die Ladung q gebunden, so käme noch ein rückstellender, elastischer Term $\omega_0^2\mathbf{r}$ zur rechten Seite hinzu. Das einfallende Feld ist monochromatisch, was uns erlaubt, das Feld und den Positionsvektor $\mathbf{r}$ wie folgt darzustellen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r})\exp\left[-i\omega t\right]\right\} \quad \mathbf{r}(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{r}\exp\left[-i\omega t\right]\right\}\;. \tag{2}$$

Dies führt zu folgender Bewegungsgleichung für die komplexen Amplituden $\mathbf{E}$ und $\mathbf{r}$

$$-\omega^2\mathbf{r} - i\omega\gamma\mathbf{r} \;=\; \frac{q}{m}\mathbf{E}(\mathbf{r})\,. \tag{3}$$

Wir multiplizieren nun mit q und führen das (komplexe) Dipolmoment $\mathbf{p} = q\mathbf{r}$ ein. Obige Gleichung lautet dann

$$-\omega^2\mathbf{p} - i\omega\gamma\mathbf{p} \;=\; \frac{q^2}{m}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{4}$$

und hat die Lösung

$$\mathbf{p} \;=\; -\frac{q^2/m}{\omega^2 + i\omega\gamma}\,\mathbf{E}(\mathbf{r})\,. \tag{5}$$

Die Polarisierung $\mathbf{P}$ am Ort $\mathbf{r}$ wird nun durch die Ladungsdichte N (Anzahl Ladungen pro Volumeneinheit, $[N] = m^{-3}$) bestimmt, das heisst,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \;=\; N(\mathbf{r})\,\mathbf{p}\,. \tag{6}$$

Wir nehmen an, dass die Ladungsdichte räumlich konstant ist und erhalten

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{q^2N/m}{\omega^2 + i\omega\gamma}\,\mathbf{E}(\mathbf{r})\,. \tag{7}$$

Da $\mathbf{P} = \varepsilon_0[\varepsilon(\omega) - 1]\mathbf{E}$ finden wir eine Formel für die Permittivität eines Plasmas

$$\varepsilon(\omega) \;=\; 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \tag{8}$$

wobei $\omega_p = \sqrt{Nq^2/(m\varepsilon_0)}$ die Plasmafrequenz bezeichnet.

1. (5 Punkte) Betrachten Sie Frequenzen $\omega \to 0$ und bestimmen Sie die dc Leitfähigkeit σ im Plasma.

Lösung:
Die Polarisationsstromdichte $\mathbf{j}_p$ ist (1 Punkt)

$$\mathbf{j}_p(\mathbf{r}) = -i\omega\mathbf{P}(\mathbf{r}) = -i\omega\left[\mathbf{D}(\mathbf{r}) - \varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r})\right] .$$

Mit $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r})$ finden wir (1 Punkt)

$$\mathbf{j}_p(\mathbf{r}) = -i\omega\varepsilon_0\left[\varepsilon(\omega) - 1\right]\mathbf{E}(\mathbf{r}) .$$

Mit $\varepsilon(\omega)$ aus der Aufgabenstellung (1 Punkt)

$$\mathbf{j}_p(\mathbf{r}) = \left[\frac{i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega + i\gamma}\right]\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\omega_p^2\left[\frac{\gamma}{\omega^2+\gamma^2} + i\frac{\omega}{\omega^2+\gamma^2}\right]\mathbf{E}(\mathbf{r}) .$$

Für $\omega \to 0$ finden wir (1 Punkt)

$$\mathbf{j}_p(\mathbf{r}, \omega = 0) = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\gamma}\mathbf{E}(\mathbf{r}) ,$$

und somit ist die dc Leitfähigkeit (1 Punkt)

$$\sigma = \varepsilon_0\omega_p^2/\gamma .$$

2. (5 Punkte) Betrachten Sie eine ebene Welle, die sich in z Richtung ausbreitet und bei $z = 0$ in ein Plasma eindringt. Die Streurate sei viel kleiner als die Plasmafrequenz ($\gamma \ll \omega_p$). Diskutieren Sie die Propagation für $\omega \gg \omega_p$ und für $\omega \ll \omega_p$.

Lösung:
Das frequenzabhängige Verhalten einer ebenen Welle der Form (1 Punkt)

$$E(z) = E_0\, e^{ikz} \qquad \text{mit} \qquad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}$$

welche in ein Plasma eindringt, ist durch die dielektrische Funktion ε gegeben. In den gegebenen Fällen können folgende Näherungen durchgeführt werden:

Für $\omega \gg \omega_p$: (1 Punkt)

$$\varepsilon = 1 - \underbrace{\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2} + i\frac{\gamma}{\omega}\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2}}_{\approx 0} \approx 1$$

Dies entspricht verlustfreier Propagation der Welle durch das Plasma.

Für $\omega \ll \omega_p$: (1 Punkt)

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2} + i\frac{\gamma}{\omega}\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2} \approx i\frac{\omega_p^2}{\gamma\omega}$$

Für die Propagation der ebenen Welle ergibt sich somit: (1 Punkt)

$$E(z) = E_0 e^{i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}z} = E_0 e^{i\frac{\omega}{c}\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{\omega_p}{\sqrt{\gamma\omega}}z} = \\ = E_0 e^{i\frac{\omega_p}{c}\sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}}z} e^{-\frac{\omega_p}{c}\sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}}z}$$

Im Grenzfall hoher Frequenzen wird die Amplitude der eindringenden Welle exponentiell gedämpft. Die Propagationslänge, auf der die Amplitude auf den Bruchteil $1/e$ ihres ursprünglichen Wertes abfällt, ergibt sich zu: (1 Punkt)

$$l = \frac{c}{\omega_p}\sqrt{\frac{2\gamma}{\omega}}$$

3. (2 Punkte) Was passiert bei $\omega = \omega_p$? Hinweis: $\gamma \approx 0$ setzen und $\nabla \cdot \mathbf{D}$ betrachten.

   Lösung:
   Für $\omega = \omega_p$ und $\gamma \approx 0$ finden wir $\varepsilon \approx 0$. Die Konsequenz dieser Näherung lässt sich anhand folgender Betrachtung veranschaulichen. Für die Divergenz der dielektrischen Verschiebung gilt: (1 Punkt)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon_0 \underbrace{\varepsilon}_{\approx 0} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

   Aus dem generellen Fall $\varepsilon \neq 0$ ergibt sich die Einschränkung auf Transversal-Wellen ($\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$) nach $\nabla \cdot \mathbf{E} \propto \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. Für $\omega = \omega_p$ ergeben sich zusätzlich longitudinale Wellen als Lösung der Maxwell'schen Gleichungen. Diese entsprechen sogenannten Plasmaoszillationen, oder Plasmonen. (1 Punkt)

Wir betrachten nun die Kommunikation zwischen einem Satelliten und einer Antenne, die auf der Erdoberfläche stationiert ist. Damit elektromagnetische Wellen von Antenne zum Satellit gelangen, müssen diese die Ionosphäre durchdringen können. Die Ionosphäre besteht aus zwei Schichten, der E Schicht und der F Schicht. Wir betrachten hier nur die untere E Schicht, die etwa 100 km über der Erdoberfläche beginnt und etwa 50 km dick ist. Die Elektronenladungsdichte ist $N_e = 3 \cdot 10^{11}\, m^{-3}$ und die Elektron-Elektron Kollisionsrate is $\gamma = 50$ kHz.

4. (1 Punkt) Bestimmen Sie die Plasmafrequenz $\omega_p/2\pi$ der Ionosphäre.

   Lösung:
   (1 Punkt)

$$f_p = \omega_p/(2\pi) = 3.09 \cdot 10^7 \mathrm{Hz}/(2\pi) = 4.9 \mathrm{MHz}$$

5. (2 Punkte) Ist es vorteilhaft GHz oder kHz Frequenzen zu wählen, um mit dem Satelliten zu kommunizieren?

Lösung:
GHz bzw. kHz Frequenzen entsprechen den Grenzfällen $\omega \gg \omega_p$ bzw. $\omega \ll \omega_p$ aus Teilaufgabe 2. Da GHz-Wellen in der E Schicht frei propagieren können ist dies der vorteilhafte Kommunikationsfrequenzbereich. (2 Punkte)

6. (2 Punkte) Welche Frequenzen wählen Sie um von einer Antenne in der Schweiz zu einer Antenne in Australien zu funken?

   Lösung:
   Wellen im kHz-Bereich werden an der Ionosphäre aufgrund von $\omega \ll \omega_p$ verstärkt reflektiert (und absorbiert). Dies führt zu verbesserten Übertragungsraten aus der Schweiz nach Australien. (2 Punkte)

7. (3 Punkte) Wie stark wird das Feld einer $\omega/2\pi = 1\,$MHz Welle durch die E Schicht abgeschwächt? Hinweis: Vernachlässigen Sie Reflexionen.

   Lösung:
   (1 Punkt)

$$\varepsilon\,(1\mathrm{MHz}) = -23 + i0.19 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\varepsilon} = 0.02 + i4.8$$

   Für die Transmission durch die E-Schicht erhalten wir somit: (2 Punkte)

$$\frac{E(z=50\mathrm{km})}{E(z=0)} \propto e^{-4.8\cdot 50\mathrm{km}\cdot\omega/c} \approx 10^{-2000} \approx 0$$

   Die Transmission ist praktisch vernachlässigbar.

Die elektromagnetischen Eigenschaften eines Metalls können durch ein freies Elektronengas beschrieben werden und so ist ein Metall ebenfalls ein Plasma. Die Elektronendichte ist jedoch viel höher als in der Ionosphäre. Für die meisten Metalle ist die Plasmafrequenz im ultravioletten Bereich. Für Frequenzen im sichtbaren Bereich gilt $\gamma \ll \omega \ll \omega_p$ und die Permittivität wird $\varepsilon(\omega) \approx 1 - \omega_p^2/\omega^2$, das heisst, ε ist reell und negativ. Dies ermöglicht, dass sich an den Oberflächen von Metallen Oberfächenwellen ausbreiten können.

Um die Eigenschaften dieser Oberfächenwellen zu berechnen, betrachten wir die Grenzfläche ($z = 0$) zwischen einem nicht-dispersiven Dielektrikum mit Permittivität $\varepsilon_1 > 0$ und einem Metall mit dispersiver Permittivität $\varepsilon_2(\omega)$. Die Grenzfläche sei bei $z = 0$, das Dielektrikum im Halbraum $z > 0$, und das Metall im Halbraum $z < 0$. Wir suchen Lösungen der Maxwell Gleichungen von folgender Form

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t) \;=\; \mathrm{Re}\left\{[E_{i_x}\mathbf{n}_x + E_{i_z}\mathbf{n}_z]\;\mathrm{e}^{i[k_{i_x}x + k_{i_z}z - \omega t]}\right\} \qquad i \in [1,2]\;, \tag{9}$$

wobei $\mathbf{E}_1$ das Feld im Dielektrikum und $\mathbf{E}_2$ das Feld im Metall ist. $\mathbf{n}_x$ und $\mathbf{n}_z$ sind die Einheitsvektoren in Richtung x und z. Damit sich die Welle entlang der Grenzfläche ausbreitet, muss das Feld entlang beider z Richtungen exponentiell abfallen. Sonst würde die Welle ihre Energie ins Dielektrikum oder ins Metall abstrahlen.

8. (4 Punkte) Verwenden Sie das Gauss'sche Gesetz um eine Beziehung zwischen E_{i_x} und E_{i_z} in den beiden Materialien herzuleiten.

Lösung:
Die beiden elektrischen Felder in den Materialien $i = 1, 2$ sind gegeben durch (1 Punkt)

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} E_{i_x} \\ 0 \\ E_{i_z} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{i(k_{i_x}x + k_{i_z}z)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right\}. \tag{10}$$

Das Gauss'sche Gesetz ist erfüllt, falls für alle x, z gilt: (1 Punkt)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = i(k_{i_x}E_{i_x} + k_{i_z}E_{i_z})\,\mathrm{e}^{i(k_{i_x}x + k_{i_z}z)} \equiv 0, \qquad i = 1, 2.$$

Es müssen somit folgende Gleichungen zwischen E_{i_x} und E_{i_z} gelten: (2 Punkt)

$$k_{1_x}E_{1_x} + k_{1_z}E_{1_z} = 0, \tag{11}$$
$$k_{2_x}E_{2_x} + k_{2_z}E_{2_z} = 0. \tag{12}$$

9. (3 Punkte) An der Grenzfläche muss $\mathbf{n}_z \times \mathbf{E}$ stetig sein. Zeigen Sie, dass dies $E_{1_x} = E_{2_x}$ und $k_{1_x} = k_{2_x}$ bedingt.

Lösung:
Anhand der Stetigkeitsbedingung erhalten wir (1 Punkt)

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{E}_1|_{z=0} &= \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{E}_2|_{z=0} \\ \rightarrow \qquad E_{1_x}\mathrm{e}^{ik_{1_x}x} &= E_{2_x}\mathrm{e}^{ik_{2_x}x} \end{aligned} \tag{13}$$

Gleichung 13 muss für alle x gelten, also insbesondere auch für $x = 0$. Daraus folgt $E_{1_x} = E_{2_x}$. Wir setzen dies wiederum in Gleichung 13 ein und erhalten $k_{1_x} = k_{2_x}$: (2 Punkte)

$$E_{1_x} = E_{2_x} \equiv E_x, \qquad k_{1_x} = k_{2_x} \equiv k_x. \tag{14}$$

Wir setzen beide Gleichungen aus 14 in die Gleichungen 11 und 12 ein und erhalten

$$k_xE_x + k_{1_z}E_{1_z} = 0 \tag{15}$$
$$k_xE_x + k_{2_z}E_{2_z} = 0 \tag{16}$$
$$k_{1_z}E_{1_z} - k_{2_z}E_{2_z} = 0\,. \tag{17}$$

10. (4 Punkte) An der Grenzfäche muss auch $\mathbf{n}_z \cdot \mathbf{D}$ stetig sein. Leiten Sie daraus, und mit Hilfe der vorigen Bedingungen, die Dispersionsrelation $k_x(\omega, \varepsilon_i)$ für die Propagation entlang der Oberfläche her.

Lösung:
Aus der Stetigkeitsbedingung für $\mathbf{D}$ erhalten wir mit $\mathbf{D}_i = \varepsilon_0\varepsilon_i\mathbf{E}_i$ (1 Punkt)

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_z \cdot \mathbf{D}_1|_{z=0} &= \mathbf{n}_z \cdot \mathbf{D}_2|_{z=0} \\ \rightarrow \qquad \varepsilon_1E_{1_z}\,\mathrm{e}^{ik_xx} &= \varepsilon_2E_{2_z}\,\mathrm{e}^{ik_xx} \end{aligned} \tag{18}$$

Gleichung 18 muss wiederum auch für $x = 0$ gelten. Daraus folgt $\varepsilon_1 E_{1_z} = \varepsilon_2 E_{2_z}$. Zusammen mit Gleichung 17 erhalten wir (1 Punkt)

$$\varepsilon_1 k_{2_z} = \varepsilon_2 k_{1_z}. \tag{19}$$

Unter Verwendung von $k_i = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_i} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_i}$ und $k_i^2 = k_x^2 + k_z^2$ finden wir

$$k_{i_z} = \sqrt{k_i^2 - k_x^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_i - k_x^2}, \qquad i = 1, 2. \tag{20}$$

Gleichung 20 eingesetzt in Gleichung 19 gibt (2 Punkte)

$$\begin{aligned}
k_{2_z} &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} k_{1_z} \\
\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - k_x^2} &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - k_x^2} \\
\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - k_x^2 &= \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - k_x^2\right) \\
\frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}\right) &= k_x^2\left(1 + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2}\right) \\
\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) &= k_x^2 \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1^2}
\end{aligned}$$

$$k_x = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}\ . \tag{21}$$

11. (4 Punkte) Leiten Sie das magnetische Feld $\mathbf{H}$ her und zeigen Sie, dass die entsprechenden Grenzbedingungen erfüllt sind.

Lösung:

Wir verwenden das Faraday'sche Gesetz, um das magnetische Feld herzuleiten: (1 Punkt)

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) &= i\omega \mathbf{B}_i(\mathbf{r}) \\
\rightarrow \quad \mathbf{B}_i(\mathbf{r}) &= \frac{1}{i\omega}\nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega}\begin{bmatrix} 0 \\ k_{i_z}E_x - k_x E_{i_z} \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{i(k_x x + k_{i_z} z)}.
\end{aligned}$$

Die tangentiale Komponente vom $\mathbf{H}$-Feld zur Grenzfläche muss bei $z = 0$ stetig sein: (1 Punkt)

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{B}_1|_{z=0} &= \mathbf{n}_y \cdot \mathbf{B}_2|_{z=0} \\
\rightarrow \qquad k_{1_z}E_x - k_x E_{1_z} &= k_{2_z}E_x - k_x E_{2_z}\ .
\end{aligned} \tag{22}$$

Wir müssen zeigen, dass die Stetigkeitsbedingung in 22 mit denen von der vorigen Teilaufgabe übereinstimmen. Dazu gibt es mehrere Optionen. Wir setzen zum Bespiel die Gleichungen 15 und 16 in die Gleichung 22 ein und erhalten (1 Punkt)

$$\begin{aligned} k_{1_z} E_x + \frac{k_x^2}{k_{1_z}} E_x &= k_{2_z} E_x + \frac{k_x^2}{k_{2_z}} E_x \\ \frac{k_{1_z}^2 + k_x^2}{k_{1_z}} &= \frac{k_{2_z}^2 + k_x^2}{k_{2_z}} . \end{aligned}$$

Zusammen mit Gleichung 20 erhalten wir (1 Punkt)

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - k_{1_z}^2 + k_{1_z}^2}{k_{1_z}} &= \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - k_{2_z}^2 + k_{2_z}^2}{k_{2_z}} \\ \varepsilon_1 k_{2_z} &= \varepsilon_2 k_{1_z} . \end{aligned} \tag{23}$$

Dies entspricht genau der Gleichung 19 aus voriger Teilaufgabe. Somit haben wir gezeigt, dass die Stetigkeitsbedingung für das magnetische Feld erfüllt ist.

12. (5 Punkte) Wir suchen Lösungen, die exponentiell von der Grenzfläche abfallen und sich nur entlang der Oberfläche ausbreiten. Die Felder müssen also im Limit $z \to \pm\infty$ verschwinden. Leiten Sie eine Bedingung für ε_2 her, sodass diese Bedingung erfüllt ist.

Lösung:
Wir suchen Lösungen, welche zwei Bedingungen erfüllen:

(a) Die Felder sollen sich in x-Richtung ausbreiten. Somit muss k_x rein reell sein, denn (1 Punkt)

$$k_x = \mathrm{Re}\{k_x\} \quad \to \quad \mathrm{e}^{ik_x x} = \mathrm{e}^{i\mathrm{Re}\{k_x\}x}. \tag{24}$$

(b) Die Felder sollen in z-Richtung exponentiell abfallen. Somit muss k_{i_z} rein imaginär sein, denn (1 Punkt)

$$\begin{aligned} k_{1_z} = i\mathrm{Im}\{k_{1_z}\} \quad &\to \quad \mathrm{e}^{ik_{1_z} z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{Im}\{k_{1_z}\}z} \ (z > 0) \\ k_{2_z} = i\mathrm{Im}\{k_{2_z}\} \quad &\to \quad \mathrm{e}^{-ik_{2_z} z} = \mathrm{e}^{\mathrm{Im}\{k_{2_z}\}z} \ (z < 0) \end{aligned} \tag{25}$$

Da $\varepsilon_1 > 0$ kriegen wir mit Hilfe der Gleichungen 21 und 20

(a) k_x ist rein reell, falls gilt: (1 Punkt)

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} > 0 \Longrightarrow \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} < 0. \tag{26}$$

(b) k_{i_z} ist rein imaginär, falls gilt: (1 Punkt)

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_i - k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_i - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_i^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} < 0 \Longrightarrow \varepsilon_2 < -\varepsilon_1. \tag{27}$$

Somit ist die Bedingung für ε_2 (1 Punkt)

$$\varepsilon_2 < -\varepsilon_1 \qquad \text{bzw.} \qquad \varepsilon_2 < 0 \wedge |\varepsilon_2| > |\varepsilon_1| , \tag{28}$$

das heisst, dass Material muss eine negative Permittivität haben und folglich ein Metall sein.

Eine elektromagnetische Oberflächenwelle bedingt eine Ladungsmodulation, welche entlang der Grenzfläche propagiert. Die Oberflächenladungsdichte lässt sich mit Hilfe der Felder und den unterschiedlichen ε_i an der Grenzfläche berechnen ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$). Da eine elektromagnetische Oberflächenwelle immer mit einer entsprechenden Oberflächenladungswelle im Material verknüpft ist, spricht man von einem *Oberflächen-Polariton*. Wenn die Ladungen frei sind, spricht man von einem Phonon-Polariton, wenn sie gebunden sind, dann von einem Phonon-Polariton.

13. (5 Punkte) Benutzen Sie die Integralform von $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ um die Oberflächenladungsdichte $\sigma(x,t)$ an der Grenzfläche zu berechnen. Hinweis: Drücken Sie σ als Funktion von E_x aus.

Lösung:

Das Gauss'sche Gesetz in den beiden Teilgebieten bedingt (siehe 11 und 12) (1 Punkt)

$$E_{1_z} = -E_x\, k_x/k_{1_z} \tag{29}$$
$$E_{2_z} = -E_x\, k_x/k_{2_z}\,. \tag{30}$$

Das Gauss'sche Gesetz ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$) an der Grenzfläche gibt (2 Punkte)

$$E_{1_z}\, A - E_{2_z}\, A = \rho/\varepsilon_0\,. \tag{31}$$

Somit

$$E_x\, k_x\, [1/k_{2_z} - 1/k_{1_z}] = \sigma/\varepsilon_0\,. \tag{32}$$

$$\sigma = E_x\, \varepsilon_0\, k_x\, \frac{k_{1_z} - k_{2_z}}{k_{1_z}\, k_{2_z}}\,. \tag{33}$$

Da $\varepsilon_1 k_{2_z} = \varepsilon_2 k_{1_z}$ (siehe 19) ergibt obige Gleichung (1 Punkt)

$$\sigma = E_x\, \varepsilon_0\, \frac{k_x}{k_{1_z}}\, \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}\,. \tag{34}$$

Mit $k_{1_z} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - k_x^2}$ und $k_x = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2/(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$ (siehe 21) finden wir schlussendlich

$$\sigma = E_x\, \varepsilon_0\, \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}\,. \tag{35}$$

Die Ladungsdichte an der Grenzfläche breitet sich dementsprechend wie folgt aus (1 Punkt)

$$\sigma(x,t) = \mathrm{Re}\left\{ E_x\, \varepsilon_0\, \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}\, \mathrm{e}^{i[k_x x - \omega t]} \right\} \tag{36}$$

wobei $k_x = (\omega/c)[\varepsilon_1\varepsilon_2/(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]^{1/2}$.

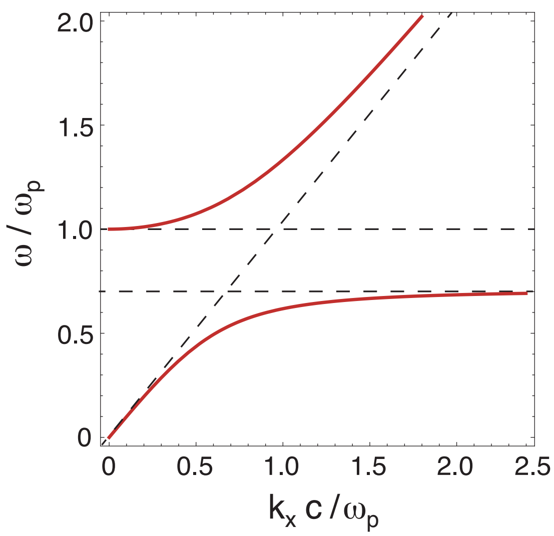
Die dielektrische Permittivität des Dielektrikums (ε_1) kann als konstant angenommen werden, während die des Metalles durch die Plasmarelation (8) gegeben ist. Für $\omega \gg \gamma$ lautet diese

$$\varepsilon_2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\,. \tag{37}$$

14. (5 Punkte) Plotten Sie die Dispersionsrelation $\omega(k_x)$ and vergleichen Sie diese mit der Dispersionsrelation im Dielektrikum $\omega(k) = \sqrt{\varepsilon_1}k/c$. Diskutieren Sie den Fall $\omega \to \omega_p/\sqrt{1+\varepsilon_1}$. Was ist die Wellenlänge der Oberflächenwelle in diesem Fall? Hinweise: Es ist einfacher $k_x(\omega)$ darzustellen als $\omega(k_x)$. Verwenden Sie die skalierten Grössen $\tilde{\omega} = \omega/\omega_p$ und $\tilde{k}_x = (c/\omega_p)k_x$. Für's plotten können Sie $\varepsilon_1 = 1$ annehmen.

Lösung:

Wir setzen Gleichung 37 in Gleichung 21 ein, verwenden $\varepsilon_1 = 1$, skalieren die Variabeln ω und k_x, und plotten $\tilde{k}_x(\tilde{\omega})$. Wir drehen dann die Figur um $90°$ und kriegen folgende Dispersionskurve: (3 Punkte)

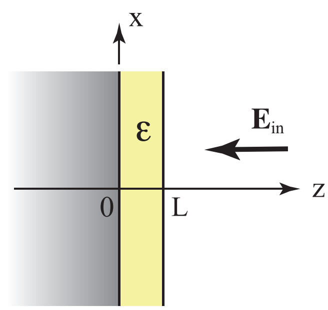


Die Dispersionkurve besteht aus zwei Ästen. Der untere Ast entspricht der Oberflächenwelle (Felder, die exponentiell von der Oberfläche abfallen), während der obere Ast der Wellenpropagation einer ebenen Welle im Metall für Frequenzen $\omega > \omega_p$ entspricht. Für $\omega > \omega_p$ ist das Metall kein Metall mehr, d.h. die Permittivität wird positiv wie in einem Dielektrikum. Für Frequenzen zwischen den zwei Dispersionästen gibt's keine Lösungen, d.h. weder eine ebene Welle noch eine Oberflächenwelle. Die diagonale gestrichelte Linie ist $\omega = ck$ und entspricht der Dispersionsrelation im Dielektrikum. Diese Linie trennt die ebene Wellen (links) von der Oberflächenwelle (rechts).

Für $\omega \to \omega_p/\sqrt{1+\varepsilon_1}$ (untere gestrichelte Linie) wird $k_x \to \infty$. (2 Punkte) Die Wellenlänge der Oberflächenwelle $\lambda = 2\pi/k_x$ geht folglich gegen Null. In diesem Limit besteht die Oberflächenwelle aus einer alternierenden Abfolge von positiven und negativen Elementarladungen. In der Praxis erreicht man diesen Limit nicht, da die Dämpfung γ in Gleichung (8) überhand nimmt.

2 Reflexion an einem Dielektrischen Film (30 Pkt.)

Wir betrachten die elektromagnetischen Felder in einem dielektrischen Film mit Dicke L, Permittivität $\varepsilon > 0$ sowie Permeabilität $\mu = 1$, der auf ein perfekt reflektierendes Material aufgebracht ist, das den gesamten Halbraum $z < 0$ füllt. Im Bereich $z > L$ herrscht ein Vakuum.



Eine senkrecht einfallende ebene Welle

$$\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) \;=\; \mathrm{E}_0 \, \cos(-k_0 z - \omega t) \, \mathbf{n}_x$$

trifft auf den dielektrischen Film auf, wobei $\mathbf{n}_x$ der Einheitsvektor in x Richtung ist, sowie E_0 eine reelle Amplitude.

1. (2 Punkte) Schreiben Sie das einfallende Feld $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ in komplexer Schreibweise und definieren Sie die komplexe Amplitude $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r})$.

   Lösung:
   Es gilt

$$\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) \;=\; \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \mathrm{E}_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 z} \, \mathbf{n}_x$$

2. (5 Punkte) Formulieren Sie die komplexen elektrischen Felder im Dielektrikum $\mathbf{E}_{\text{diel}}(\mathbf{r})$ sowie im Vakuum $\mathbf{E}_{\text{vac}}(\mathbf{r})$ jeweils als Summe zweier gegenläufiger Teilfelder. Wie berechnet sich die Wellenzahl im Dielektrikum k_d aus jener im Vakuum k_0?

   Lösung:
   Im Vakuum (2 Punkte):

$$\mathbf{E}_{\text{vac}}(\mathbf{r}) = \mathrm{E}_{\text{vac}} \, \mathbf{n}_x \;=\; \left[\mathrm{E}_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 z} \;+\; \mathrm{E}_{\text{ref}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 z}\right] \mathbf{n}_x$$

   Im Dielektrikum (2 Punkte):

$$\mathbf{E}_{\text{diel}}(\mathbf{r}) = \mathrm{E}_{\text{diel}} \, \mathbf{n}_x \;=\; \left[\mathrm{E}^{(1)}_{\text{diel}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_d z} \;-\; \mathrm{E}^{(2)}_{\text{diel}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_d z}\right] \mathbf{n}_x$$

   wobei $k_d = \sqrt{\varepsilon} k_0$ (1 Punkt).

3. (3 Punkte) Bestimmen Sie die zugehörigen komplexen magnetischen Felder im Vakuum $\mathbf{H}_{\text{vac}}(\mathbf{r})$ sowie im Dielektrikum $\mathbf{H}_{\text{diel}}(\mathbf{r})$ als Funktion der in Teilaufgabe 2 verwendeten elektrischen Teilfelder.

Lösung:
Im Vakuum (1.5 Punkte):

$$\mathbf{H}_{\text{vac}}(\mathbf{r}) = \mathrm{H}_{\text{vac}}\,\mathbf{n}_y \;=\; Z_{\text{vac}}^{-1}\left[-\mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 z} \;+\; \mathrm{E}_{\text{ref}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 z}\right]\mathbf{n}_y$$

Im Dielektrikum (1.5 Punkte):

$$\mathbf{H}_{\text{diel}}(\mathbf{r}) = \mathrm{H}_{\text{diel}}\,\mathbf{n}_y \;=\; Z_{\text{diel}}^{-1}\left[-\mathrm{E}_{\text{diel}}^{(1)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_d z} \;-\; \mathrm{E}_{\text{diel}}^{(2)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_d z}\right]\mathbf{n}_y$$

wobei $k_d = \sqrt{\varepsilon}k_0$.

4. (6 Punkte) Formulieren Sie die Randbedingungen an den beiden Grenzflächen, und bestimmen Sie mit ihrer Hilfe das reflektierte Feld $\mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, t)$ im Bereich $z > L$.

Lösung:
Das tangentiale elektrische Feld muss auf beiden Grenzflächen stetig sein. Außerdem verschwindet das elektrische Feld im Inneren des Reflektors. Das tangentiale H-Feld macht einen Sprung proportional zur Oberflächenladungsdichte, die lediglich auf perfekten Leitern eine Rolle spielt. Da wir lediglich eine weitere Randbedingung brauchen (3 Unbekannte, nämlich $E_{\text{diel}}^{(1)}$, $E_{\text{diel}}^{(2)}$, sowie E_{ref}; E_0 ist gegeben), betrachten wir die Grenzfläche zwischen Dielektrikum und Vakuum.

(1 Punkt) $z = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{E}_{\text{diel}} = 0: \quad \mathrm{E}_{\text{diel}}^{(1)} = \mathrm{E}_{\text{diel}}^{(2)}$

(1 Punkt) $z = L \quad \rightarrow \quad \mathrm{E}_{\text{diel}} = \mathrm{E}_{\text{vac}}: \quad \left[\mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 L} + \mathrm{E}_{\text{ref}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 L}\right] = \left[\mathrm{E}_{\text{diel}}^{(1)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_d L} - \mathrm{E}_{\text{diel}}^{(2)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_d L}\right]$

(1 Punkt) $z = L \quad \rightarrow \quad \mathrm{H}_{\text{diel}} = \mathrm{H}_{\text{vac}}:$

$$\left[-\mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 L} + \mathrm{E}_{\text{ref}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 L}\right] = \frac{Z_{\text{vac}}}{Z_{\text{diel}}}\left[-\mathrm{E}_{\text{diel}}^{(1)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_d L} - \mathrm{E}_{\text{diel}}^{(2)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_d L}\right]$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 L} + \mathrm{E}_{\text{ref}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 L} &= -2\mathrm{i}\mathrm{E}_{\text{diel}}\sin(k_d L) \\
-\mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 L} + \mathrm{E}_{\text{ref}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 L} &= -2\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{E}_{\text{diel}}\cos(k_d L)
\end{aligned}$$

Aufgelöst nach E_{vac}:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\varepsilon}\cos(k_d L)\mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 L} + \sqrt{\varepsilon}\cos(k_d L)\mathrm{E}_{\text{ref}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 L} &= -\mathrm{i}\sin(k_d L)\mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 L} + \mathrm{i}\sin(k_d L)\mathrm{E}_{\text{ref}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 L} \\
\mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 L}\left[\sqrt{\varepsilon}\cos(k_d L) + \mathrm{i}\sin(k_d L)\right] &= \mathrm{E}_{\text{ref}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 L}\left[-\sqrt{\varepsilon}\cos(k_d L) + \mathrm{i}\sin(k_d L)\right]
\end{aligned}$$

(2 Punkte) $\rightarrow \mathrm{E}_{\text{ref}} = -\mathrm{E}_0\,\dfrac{\sqrt{\varepsilon}\cos(k_d L) + \mathrm{i}\sin(k_d L)}{\sqrt{\varepsilon}\cos(k_d L) - \mathrm{i}\sin(k_d L)}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k_0 L}$

Das reflektierte Feld lautet (1 Punkt):

$$\mathbf{E}_{\rm ref}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_{\rm ref}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}_{\rm ref}(\mathbf{r}) = -\mathrm{E}_0\,\frac{\sqrt{\varepsilon}\cos(k_dL) \;+\; \mathrm{i}\sin(k_dL)}{\sqrt{\varepsilon}\cos(k_dL) \;-\; \mathrm{i}\sin(k_dL)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(z-2L)}\,\mathbf{n}_x$$

Test: $k_0 = k_d$ und $\varepsilon = 1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_{\rm ref}(\mathbf{r}) = -\mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0z}\,\mathbf{n}_x$; selbes Resultat für $L = 0$.

5. (5 Punkte) Berechnen Sie die Intensität der reflektierten Welle im Vakuum als Funktion der Filmdicke L. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit der Intensität der einfallenden Welle und diskutieren Sie Ihr Ergebnis unter dem Gesichtspunkt der Energieerhaltung.

Lösung:
Die reflektierte Intensität im Vakuum ergibt sich aus (2 Punkte)

$$I_{\rm ref}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2Z_0}\,|\mathbf{E}_{\rm ref}(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{2Z_0}E_0^2 = I_{\rm in}(\mathbf{r}), \tag{38}$$

da die Amplitude des reflektierten Feldes durch folgenden Faktor bestimmt wird:

$$\left|\frac{\sqrt{\varepsilon}\cos(k_dL) \;+\; \mathrm{i}\sin(k_dL)}{\sqrt{\varepsilon}\cos(k_dL) \;-\; \mathrm{i}\sin(k_dL)}\right| \;=\; 1.$$

Somit hängt die reflektierte Intensität nicht von der Filmdicke ab (1 Punkt) und ist gleich der einfallenden Intensität (1 Punkt). Dies ist plausibel, schließlich kann auf der Rückseite durch den perfekten Reflektor keine Intensität entkommen und das Dielektrikum absorbiert nicht. Energie ist erhalten (1 Punkt).

6. (6 Punkte) Berechnen Sie die elektrische Energiedichte $w_e = (1/4)\varepsilon_0\varepsilon|\mathbf{E}_{\rm diel}(\mathbf{r})|^2$, die magnetische Energiedichte $w_m = (1/4)\mu_0\mu|\mathbf{H}_{\rm diel}(\mathbf{r})|^2$, und die gesamte Energiedichte $w_e + w_m$ im Dielektrikum als Funktion vom Ort z und der Feldamplitude im Dielektrikum $E_{\rm diel}$. Unter Verwendung der Randbedingungen, bestimmen Sie die Feldamplitude $E_{\rm diel}$ als Funktion der einfallenden Amplitude E_0 und der Filmdicke L.

Lösung:
Elektrische (2 Punkte) und magnetische (2 Punkte) Energiedichten und Summe (1 Punkt).

$$w_e \;=\; \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon|\mathbf{E}_{\rm diel}(\mathbf{r})|^2 \;=\; \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon\,|-2\mathrm{i}\mathrm{E}_{\rm diel}\sin(k_dz)|^2 \;=\; \varepsilon_0\varepsilon\,|\mathrm{E}_{\rm diel}|^2\sin^2(k_dz)$$

$$w_m \;=\; \frac{1}{4}\mu_0|\mathbf{H}_{\rm diel}(\mathbf{r})|^2 \;=\; \frac{1}{4}\mu_0\left|-2Z_{\rm diel}^{-1}\mathrm{E}_{\rm diel}\cos(k_dz)\right|^2 \;=\; \varepsilon_0\varepsilon\,|\mathrm{E}_{\rm diel}|^2\cos^2(k_dz)$$

$$w_{\rm tot} \;=\; w_e + w_m \;=\; \varepsilon_0\varepsilon\,|\mathrm{E}_{\rm diel}|^2$$

Berechnung von $\mathrm{E}_{\mathrm{diel}}$ aus Randbedingungen (1 Punkt):

$$\begin{aligned}
2\mathrm{E}_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 L} &= -2\mathrm{i}\mathrm{E}_{\mathrm{diel}} \sin(k_d L) + 2\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{E}_{\mathrm{diel}} \cos(k_d L) \\
\mathrm{E}_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 L} &= \mathrm{E}_{\mathrm{diel}} \left[-\mathrm{i}\sin(k_d L) + \sqrt{\varepsilon}\,\cos(k_d L)\right] \\
\rightarrow \mathrm{E}_{\mathrm{diel}} &= \mathrm{E}_0\, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 L}}{\sqrt{\varepsilon}\,\cos(k_d L) - \mathrm{i}\sin(k_d L)}
\end{aligned}$$

7. (3 Punkte) Bestimmen Sie die Filmdicken L als Funktion der Vakuumwellenlänge λ_0, für welche die Energiedichte im Film maximal wird.

Lösung:
E_{diel} haben wir bereits bestimmt, so dass (1 Punkt)

$$|\mathrm{E}_{\mathrm{diel}}|^2 = \left|\mathrm{E}_0\, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 L}}{\sqrt{\varepsilon}\,\cos(k_d L) - \mathrm{i}\sin(k_d L)}\right|^2 = \frac{E_0^2}{\varepsilon\cos^2(k_d L) + \sin^2(k_d L)}. \tag{39}$$

Die Energiedichte wird maximal, wenn der Nenner minimal wird (1 Punkt). Da $\sqrt{\varepsilon} > 1$, ist der Nenner minimal, wenn $\cos^2(k_d L) = 0$. Das heisst, $k_d L = m \cdot \pi/2$ mit $m = 1, 3, 5, \ldots$, oder $L = m\pi/(2\sqrt{\varepsilon}k_0) = m\lambda_0/(4\sqrt{\varepsilon})$. (1 Punkt)