

# Übung 4

Abgabe: 22.03. bzw. 26.03.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen  
Frühjahrssemester 2019  
Photonics Laboratory, ETH Zürich  
www.photonics.ethz.ch

## Pulse und Interferenz

In dieser Übung betrachten wir nach einer kleinen mathematischen Vorbereitung die zeitliche Form eines Pulses mit rechteckförmigem Frequenzspektrum. Die letzte Aufgabe befasst sich mit einem Gerät zur Messung von Rotationsgeschwindigkeiten. Versuchen Sie, Ihre Gedankengänge knapp aber nachvollziehbar zu kommentieren. Achten Sie bei Graphen auf eine aussagekräftige Achsenbeschriftung inklusive korrekter Einheiten.

### 1 Mathematische Vorarbeit (10 Pkt.)

Die Rechtecksfunktion sei definiert als

$$\text{rect}(x, x_0, \Delta) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_0 - \Delta < x < x_0 + \Delta, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (1)$$

und die sinc-Funktion als

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \quad (2)$$

Verwenden Sie die Fouriertransformation um zu zeigen, dass gilt

$$\text{rect}(\omega, \omega_0, \Delta) = \frac{\Delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega-\omega_0)t} \text{sinc}(\Delta t). \quad (3)$$

#### Lösung:

Wir berechnen zunächst die Fouriertransformation der Rechtecksfunktion

$$\mathcal{FT}\{\text{rect}(\omega, \omega_0, \Delta)\} = \int_{\omega_0-\Delta}^{\omega_0+\Delta} e^{-i\omega t} d\omega = -\frac{1}{it} e^{-i\omega t} \Big|_{\omega_0-\Delta}^{\omega_0+\Delta} = 2\Delta \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t} e^{-i\omega_0 t}. \quad (4)$$

Durch Rücktransformation erhalten wir

$$\text{rect}(\omega, \omega_0, \Delta) = \frac{\Delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i(\omega-\omega_0)t'} \frac{\sin(\Delta t')}{\Delta t'}. \quad (5)$$

Mit der Ersetzung  $t = -t'$ , Anpassung der Integrationsgrenzen und Ausnutzung der Antisymmetrie der Sinusfunktion erhalten wir

$$\text{rect}(\omega, \omega_0, \Delta) = \frac{\Delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega-\omega_0)t} \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t}. \quad (6)$$

## 2 Frequenzspektrum eines Pulses (50 Pkt.)

Die hohen Datenübertragungsraten des Internets sind durch optische Kommunikationsverfahren möglich geworden, die auf der Encodierung von Information auf in Glasfasern propagierende Lichtpulse beruhen. Hohe Taktraten benötigen zwingend entsprechend kurze Pulse, die wiederum auf Lichtquellen mit passenden Frequenzspektren basieren. In dieser Aufgabe befassen wir uns mit dem Frequenzspektrum eines solchen Pulses.

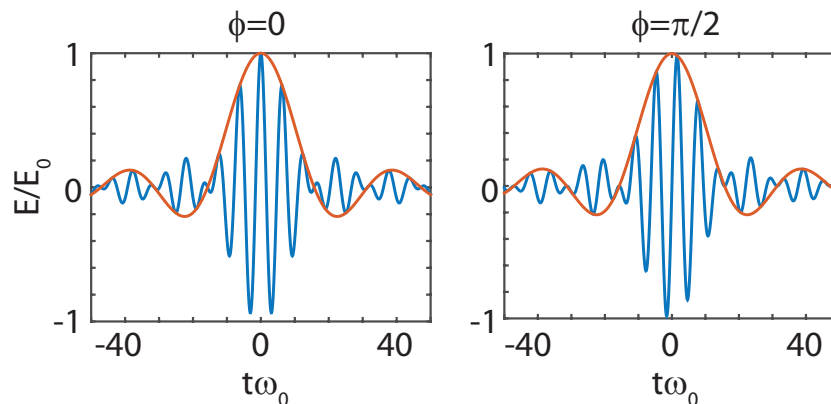
Wir betrachten einen  $y$ -polarisierten optischen Puls im Vakuum, der sich in positive  $x$ -Richtung ausbreitet und dessen  $y$ -Komponente des elektrischen Feldes am Ort  $x = 0$  als Funktion der Zeit lautet

$$E(x = 0, t) = E_0 \operatorname{sinc}[\alpha ct] \cos(\omega_0 t - \phi). \quad (7)$$

- (a) (9 Pkt.) Erstellen Sie jeweils einen Graphen des zeitabhängigen Feldes am Ort  $x = 0$  für den Fall  $\phi = 0$  sowie  $\phi = \pi/2$ . Zeichnen Sie die Einhüllende separat in Ihre Graphen ein. Beschreiben Sie in Worten, warum  $\phi$  die *carrier-envelope* Phase genannt wird. Argumentieren Sie, warum die *carrier-envelope* Phase insbesondere bei sehr kurzen Pulsen bedeutsam ist. *Hinweis:* Tragen Sie die dimensionslose Grösse  $E(x = 0, t)/E_0$  auf der Ordinate gegen die dimensionslose Grösse  $\omega_0 t$  auf der Abszisse auf. Geeignete Parameter für Ihren Graphen sind beispielsweise  $\omega_0 t = -50 \dots 50$  und  $\alpha c/\omega_0 = 0.2$ .

### Lösung:

Die Einhüllende (*envelope*) ist hier die  $\operatorname{sinc}$ -Funktion, während die Trägerwelle bei Frequenz  $\omega_0$  oszilliert. Die *carrier-envelope* Phase bestimmt, wie die Trägerwelle innerhalb der Einhüllenden platziert ist. Bei sehr kurzen Pulsen hängt die maximale Feldstärke entscheidend von der *carrier-envelope* Phase ab. Die maximale Feldstärke wird bei  $\phi = 0$  erreicht, also wenn Maximum von Trägerwelle und Einhüllender aufeinandertreffen. Die folgenden Graphen sind mit den vorgeschlagenen Parametern erstellt.



- (b) (7 Pkt.) Wie lautet das zeit- und ortsabhängige reelle Feld  $E(x, t)$  des Pulses? *Hinweis:* Verwenden Sie das Prinzip von d'Alembert.

### Lösung:

Laut dem Prinzip von d'Alembert erhalten wir mit der Ersetzung  $t \rightarrow t - x/c$

$$E(x, t) = E_0 \operatorname{sinc}[\alpha(x - ct)] \cos\left(\frac{\omega_0}{c}x - \omega_0 t + \phi\right) \quad (8)$$

- (c) (optional) Überprüfen Sie durch explizite Rechnung, ob Ihr Feld aus der vorherigen Teilaufgabe die Wellengleichung erfüllt.
- (d) (12 Pkt.) Berechnen Sie das Frequenzspektrum des Pulses  $\hat{E}(x, \omega)$ .

**Lösung:**

Wir erhalten das Frequenzspektrum durch Fouriertransformation des zeitabhängigen Feldes

$$\hat{E}(x, \omega) = \frac{E_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \text{sinc}[\alpha(x - ct)] \left\{ e^{i(k_0 x - \omega_0 t + \phi)} + e^{-i(k_0 x - \omega_0 t + \phi)} \right\}. \quad (9)$$

Zunächst wenden wir uns dem ersten Summanden zu und finden

$$\begin{aligned} \hat{E}_1(x, \omega) &= \frac{E_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \text{sinc}[\alpha(x - ct)] e^{i(k_0 x - \omega_0 t + \phi)} \\ &= \frac{E_0}{4\pi} e^{i(k_0 x + \phi)} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega_0)t} \text{sinc}[\alpha(x - ct)] \\ &= \frac{E_0}{4\pi} e^{i(k_0 x + \phi)} e^{i\frac{\omega - \omega_0}{c}x} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-i(\omega - \omega_0)u} \text{sinc}[\alpha cu] \\ &= \frac{E_0}{4\alpha c} e^{i\frac{\omega}{c}x} e^{i\phi} \text{rect}[\omega, \omega_0, c\alpha]. \end{aligned} \quad (10)$$

Hierbei haben wir die Substitution  $u = \frac{1}{c}(x - ct)$  verwendet. Der zweite Summand ergibt

$$\hat{E}_2(x, \omega) = \frac{E_0}{4\alpha c} e^{i\frac{\omega}{c}x} e^{-i\phi} \text{rect}[\omega, -\omega_0, c\alpha], \quad (11)$$

so dass das gesamte Feld im Frequenzraum lautet

$$\hat{E}(x, \omega) = \frac{E_0}{4\alpha c} e^{i\frac{\omega}{c}x} \left\{ e^{i\phi} \text{rect}[\omega, \omega_0, c\alpha] + e^{-i\phi} \text{rect}[\omega, -\omega_0, c\alpha] \right\}. \quad (12)$$

- (e) (7 Pkt.) Beweisen Sie, dass jedes Frequenzspektrum, das der Bedingung

$$\hat{E}(x, \omega) = \hat{E}^*(x, -\omega) \quad (13)$$

genügt, ein reelles zeitabhängiges Feld  $E(x, t)$  zur Folge hat.

**Lösung:**

Wir berechnen den Imaginärteil des Feldes  $E(x, t)$ , der proportional ist zu

$$\begin{aligned} E(x, t) - E^*(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{E}(x, \omega) - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{-i\omega' t} \hat{E}(x, \omega') \right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{E}(x, \omega) - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{i\omega' t} \hat{E}^*(x, \omega') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{E}(x, \omega) - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{E}^*(x, -\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \left[ \hat{E}(x, \omega) - \hat{E}^*(x, -\omega) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Der Imaginärteil des Feldes  $E(x, t)$  verschwindet also, wenn gilt  $\hat{E}(x, \omega) = \hat{E}^*(x, -\omega)$ .

- (f) (8 Pkt.) Überprüfen Sie, dass Ihr Spektrum aus Teilaufgabe (d) die Bedingung in Gl. (13) erfüllt.

**Lösung:**

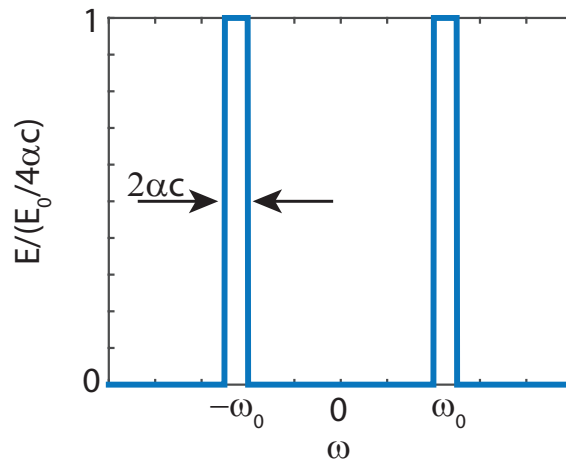
Wir komplex konjugieren unser Spektrum aus Gl. (12) bei der Frequenz  $-\omega$  und erhalten

$$\begin{aligned}\hat{E}^*(x, -\omega) &= \frac{E_0}{4\alpha c} e^{-i\frac{-\omega}{c}x} \left\{ e^{-i\phi} \text{rect}[-\omega, \omega_0, c\alpha] + e^{i\phi} \text{rect}[-\omega, -\omega_0, c\alpha] \right\} \\ &= \frac{E_0}{4\alpha c} e^{i\frac{\omega}{c}x} \left\{ e^{-i\phi} \text{rect}[\omega, -\omega_0, c\alpha] + e^{i\phi} \text{rect}[\omega, \omega_0, c\alpha] \right\} \\ &= \hat{E}(x, \omega),\end{aligned}\tag{15}$$

wobei wir die Symmetrieeigenschaft der Rechtecksfunktion  $\text{rect}(\omega, \omega_0, \Delta) = \text{rect}(-\omega, -\omega_0, \Delta)$  verwendet haben.

- (g) (4 Pkt.) Skizzieren Sie das Frequenzspektrum  $\hat{E}(x=0, \omega)$  am Ort  $x=0$  für  $\phi=0$ .

**Lösung:**



- (h) (3 Pkt.) Wie ist der Zusammenhang zwischen der zeitlichen Länge eines Pulses und seinem Frequenzspektrum? Sind kürzere Pulse spektral breiter oder schmaler?

**Lösung:**

Die Breiten im Zeitraum  $\Delta t$  und Frequenzraum  $\Delta$  skalieren dank der Fourierrelation invers miteinander laut  $\Delta t \propto 1/\Delta$ . Kürzere Pulse sind demnach spektral breiter.

### 3 Sagnac Interferometer (40 Pkt.)

In einem Sagnac Interferometer wird ein Lichtstrahl an einem Strahlteiler aufgespalten, so dass zwei Strahlen in gegenläufiger Richtung in einem Ring umlaufen, um wieder auf den Strahlteiler zu treffen, hinter dessen einem Ausgang ein Detektor steht [s. Abb. 1(a)].

Wir wenden uns zunächst dem Strahlteiler zu, von dem wir annehmen, dass es sich um ein symmetrisches Element handelt, so dass Reflexions- und Transmissionskoeffizienten nicht von der Einfallsseite abhängen. Wir beschreiben den Strahlteiler mit den komplexen Koeffizienten  $\tau$  und  $\rho$ . Die komplexe Amplitude eines einfallenden Feldes  $E_{\text{in}}$  sei nach Transmission also  $E_t = \tau E_{\text{in}}$ . Entsprechendes gelte für die Reflexion  $E_r = \rho E_{\text{in}}$ .

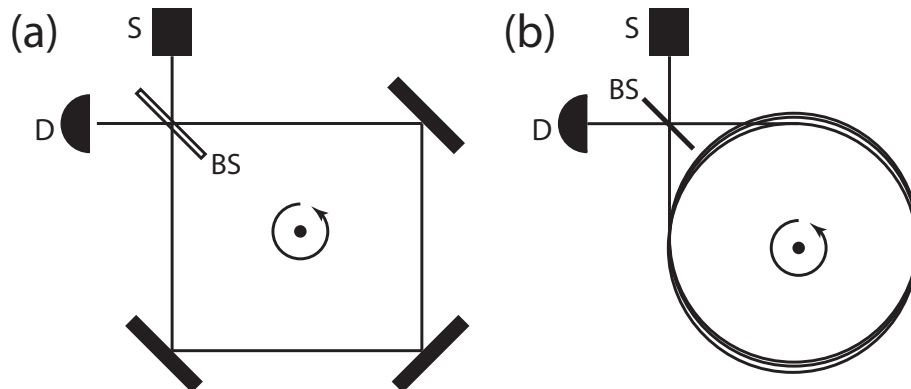


Abbildung 1: (a) Rechteckiges Sagnac Interferometer mit Strahlteiler (BS), Lichtquelle (S) und Detektor (D). (b) Faserbasiertes Sagnac Interferometer.

- (a) (4 Pkt.) Wir gehen davon aus, dass sich in unserem Interferometer ein 50/50-Strahlteiler befindet, der die einfallende Intensität verlustfrei zu jeweils 50% auf die beiden ausfallenden Arme verteilt. Was bedeutet dieser Umstand für  $\rho$  und  $\tau$ ?

**Lösung:**

Da die Intensität proportional zum Betragsquadrat der Feldamplitude ist, gelten bei einem 50/50-Strahlteiler die Relationen  $|\rho|^2 = |\tau|^2 = 1/2$ .

- (b) (5 Pkt.) Machen Sie sich klar, wo sich die beiden Ausgänge (output ports) des Interferometers befinden. Geben Sie Ausdrücke für die komplexen Felder in diesen beiden Ausgängen als Funktion des einfallenden Feldes  $E_{\text{in}}$  und der Koeffizienten  $\rho$  und  $\tau$  an.

**Lösung:**

Das Interferometer hat einen Ausgang zum Detektor, der andere Ausgang führt zurück zur Quelle. Das Feld im Detektorausgang lautet  $E_{\text{det}} = E_{\text{in}}(\rho\rho + \tau\tau)$ . Hier wurde ein Pfad am Strahlteiler zweimal reflektiert, der andere zweimal transmittiert. Das Feld im Quellausgang lautet entsprechend  $E_{\text{src}} = E_{\text{in}}(\rho\tau + \tau\rho)$ .

- (c) (5 Pkt.) Berechnen Sie die Intensität im Ausgang, der nicht zum Detektor führt.

**Lösung:**

Wir berechnen die Feldintensität im Ausgang, der zurück in die Quelle führt. Die Intensität lautet mit den Relationen für die Koeffizienten aus (a)

$$I_{\text{src}} \propto |E_{\text{src}}|^2 = |2\rho\tau|^2 |E_0|^2 = 4|\rho|^2 |\tau|^2 |E_0|^2 = |E_0|^2. \quad (16)$$

Die gesamte Intensität wird also zurück zur Quelle gesandt.

- (d) (7 Pkt.) Betrachten Sie nun die Intensität in jenem Ausgang, der zum Detektor führt, und zeigen Sie, dass die Differenz der Phasensprünge bei Reflexion und Transmission am Strahlteiler gerade  $\pm\pi/2$  betragen muss.

**Lösung:**

Es gilt für die Intensität zum Detektor

$$I_{\text{det}} \propto |E_{\text{det}}|^2 = |\tau\tau + \rho\rho|^2 |E_0|^2 = (|\tau|^4 + |\rho|^4 + 2\text{Re}[\tau\tau\rho^*\rho^*]) |E_0|^2. \quad (17)$$

Es muss nun  $I_{\text{det}} = 0$  gelten, da die gesamte Intensität, wie oben gezeigt, zur Quelle zurück gesandt wird. Es muss also gelten  $\text{Re}[\tau\tau\rho^*\rho^*] = \text{Re}[\frac{1}{4}e^{i(2\theta_t - 2\theta_r)}] = -1/4$ , wobei wir  $\rho = re^{i\theta_r}$  und  $\tau = te^{i\theta_t}$  mit  $r, t \in \mathbb{R}$  eingeführt haben. Somit muss gelten  $\theta_t - \theta_r = \pm\pi/2$ , womit gezeigt wäre, dass die Differenz der Phasensprünge bei Reflexion und Transmission am Strahlteiler gerade  $\pm\pi/2$  betragen muss.

Sagnac Interferometer werden als Gyroskope zur Präzisionsmessung von Drehgeschwindigkeiten eingesetzt. Wir betrachten hier ein Sagnac Interferometer, das sich um seine Mittelachse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  dreht.

- (e) (6 Pkt.) Zeigen Sie für das Sagnac Interferometer (unter der Annahme, dass sämtliche mechanischen Komponenten sich mit Geschwindigkeiten viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit  $c$  bewegen), dass die zusätzliche Phase, die ein Lichtfeld pro Umlauf in Rotationsrichtung aufnimmt, gerade

$$\Delta\phi = \frac{4\pi A\Omega}{c_0\lambda_0} \quad (18)$$

beträgt, wobei  $\lambda_0$  die Vakuumwellenlänge,  $A$  die vom Interferometer eingeschlossene Fläche und  $c_0$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit seien. Nehmen Sie an, das Feld propagiere in Vakuum. Wie lautet die Phasenverschiebung für ein Lichtfeld, das gegen die Rotationsrichtung umläuft? *Hinweis:* Berechnen Sie den Weglängenunterschied, der sich pro Umlauf durch die Rotation des Aufbaus ergibt. Es lässt sich allgemein zeigen, dass Gl. (18) für den Phasenunterschied unabhängig von der Form der Fläche  $A$  gilt. Wählen Sie eine geeignete Form, um Ihre Betrachtung zu vereinfachen.

**Lösung:**

Wir betrachten ein kreisförmiges Sagnac Interferometer. Die zusätzliche Weglänge durch die Rotation beträgt gerade  $\Delta l = \Omega r \Delta t$ , um die sich der Aufbau während der Zeitdauer  $\Delta t$  eines Umlaufs weitergedreht hat. Die Umlaufzeit beträgt  $\Delta t = 2\pi r / (c_0)$ . Die zusätzliche Phase ergibt sich aus  $\Delta\phi = k\Delta l = 4\pi A\Omega / (c_0\lambda_0)$ . Das gegenläufige Feld unterliegt einer Phasenverschiebung von  $-\Delta\phi$  durch die Rotation des Aufbaus.

- (f) (5 Pkt.) Berechnen Sie die Intensität am Detektor als Funktion der Phasenverschiebung  $\Delta\phi$ .

**Lösung:**

Für das Feld am Detektor gilt  $E_{\text{det}} = (\rho\rho e^{i\Delta\phi} + \tau\tau e^{-i\Delta\phi})E_0 = \rho\rho(e^{i\Delta\phi} + e^{i\pi}e^{-i\Delta\phi})E_0 = 2i\rho\rho \sin(\Delta\phi)E_0$ , wobei wir das Ergebnis  $\rho = \pm i\tau$  aus Teilaufgabe (d) verwendet haben. Für die Intensität finden wir durch Betrachtung von  $|E_{\text{det}}|^2$  den Ausdruck

$$I_{\text{det}} = \sin^2(\Delta\phi)I_0. \quad (19)$$

- (g) (5 Pkt.) Für praktische Anwendungen verwendet man in der Regel faserbasierte Sagnac Interferometer [s. Abb. 1(b)]. Durch Aufwickeln einer langen Faser kann so in einem kompakten Volumen eine grosse effektive Fläche realisiert werden. Berechnen Sie die Intensität auf dem Detektor eines Sagnac Interferometers mit einer Faserlänge von 10 km auf einer Spule mit Durchmesser 30 cm, das sich auf einem Satelliten befindet, der sich in 24 h genau einmal um die eigene Achse dreht. Der Laser des Interferometers habe eine Leistung von 100 mW und operiere bei der Vakuumwellenlänge 1550 nm.

*Hinweis:* Relativistische Betrachtungen zeigen, dass Gl. (18) unabhängig vom Brechungsindex des Mediums gilt, in dem das Feld propagiert. Der Brechungsindex der Faser ist somit irrelevant.

**Lösung:**

Das beschriebene Interferometer hat etwa 10000 Windungen und wir erhalten durch Einsetzen der Werte eine Phasendifferenz von  $\Delta\phi \approx 0.0015$ . Die Leistung auf dem Detektor wird also etwa  $P_{\text{det}} \approx \Delta\phi^2 \approx 0.2 \mu\text{W}$  betragen.

- (h) (3 Pkt.) Nennen Sie Vor- und Nachteile des beschriebenen Sagnac Gyrometers bezüglich der Kalibration und der Linearität. Wie könnten Sie das Sagnac-Interferometer in einen linearen Rotationssensor verändern und welche potentiellen Schwierigkeiten ergeben sich daraus?

**Lösung:**

Wir haben gefunden, dass das Interferometersignal in erster Ordnung quadratisch mit der Rotationsgeschwindigkeit skaliert. Dies ist nicht optimal, da kleine Signal so sehr schwer zu messen sind und die Eichung aufwändig ist. Ein Vorteil in dieser Konfiguration ist jedoch, dass das Detektorsignal bei Stillstand exakt null ist (background free). Der Nullpunkt ist also bereits kalibriert. Das Interferometer könnte in einen linearen Sensor verändert werden, wenn die Intensitäten in beiden Ausgängen bei Stillstand gerade gleich wären. Ein asymmetrischer Strahlteiler könnte hier Abhilfe schaffen. Ein Nachteil des linearen Sensors wäre jedoch, dass kleine Variationen auf einem Hintergrund gemessen werden müssen, sowie für absolute Messungen der Nullpunkt (im Stillstand) zu kalibrieren ist.