Übung 3

Abgabe: 15.03. bzw. 19.03.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Die Wellengleichung

1 Polarisationszustände und Intensität ebener Wellen (60 Pkt.)

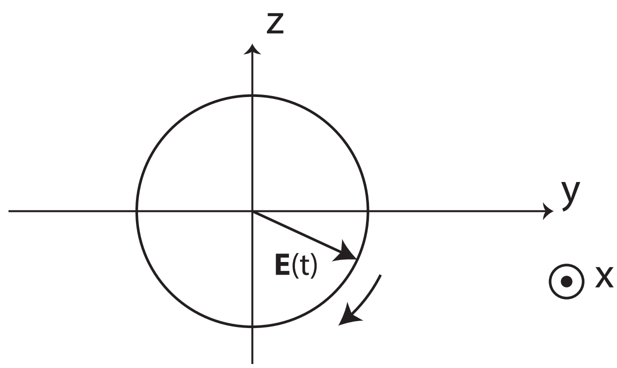
In der Vorlesung haben Sie ebene Wellen als Lösungen der quellfreien Wellengleichung kennengelernt. In dieser Aufgabe machen wir uns mit verschiedenen Polarisationszuständen ebener Wellen vertraut und veranschaulichen uns die Feldverteilungen in stehenden Wellen. Nutzen Sie insbesondere den wiederholten Wechsel zwischen reellen und komplexen Feldern, um sich einerseits mit der Rolle der komplexen Phase vertraut zu machen und die Vorteile der komplexen Notation zu begreifen. Zusätzlich sind auf der Vorlesungshomepage Visualisierungen dreier Feldverteilungen verfügbar. Ordnen Sie die Visualisierungen den Teilaufgaben zu.

Wir betrachten hier zunächst eine monochromatische, zirkular polarisierte ebene Welle, die wir als Superposition zweier linear polarisierter Wellen schreiben. Bei zirkular polarisierten Feldern beschreibt der elektrische Feldvektor an jedem Raumpunkt in der Zeit einen Kreis. Wir wählen hier die Konvention, dass wir Felder linkszirkular nennen, deren Feldvektor an einem fixen Raumpunkt in Blickrichtung *zur* Quelle im Gegenuhrzeigersinn rotiert. Die folgende Aufgabe finde im Vakuum statt.

(a) (6 Pkt.) Formulieren Sie das reelle elektrische Feld einer in positive x-Richtung propagierenden, rechtszirkular polarisierten monochromatischen ebenen Welle. Zum Zeitpunkt $t = 0$ laute das reelle elektrische Feld in der Ebene $x = 0$ gerade $\mathbf{E} = E_0\mathbf{n}_y$. Erstellen Sie eine aussagekräftige Skizze der Trajektorie des elektrischen Feldvektors und seiner Umlaufrichtung an einem beliebigen Raumpunkt.

Lösung:
Wir schreiben das Feld als Superposition zweier ebener Wellen mit einem Phasenversatz von $\pi/2$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \left[\cos(kx - \omega t)\mathbf{n}_y + \sin(kx - \omega t)\mathbf{n}_z\right]. \tag{1}$$



(b) (3 Pkt.) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass Ihr Feld aus Teilaufgabe (a) die Wellengleichung erfüllt.

Lösung:
Die Wellengleichung im quellfreien Raum lautet

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{2}$$

Wir finden für unser Feld aus Gl. (1) die Ableitungen $\nabla^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}$ und $\frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}$, so dass mit der Dispersionsrelation $\omega^2/c^2 = k^2$ die Wellengleichung erfüllt ist.

(c) (3 Pkt.) Bestimmen Sie das zu Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe (a) gehörende komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Lösung:
Mit dem Ansatz $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$ finden wir für das komplexe elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}. \tag{3}$$

(d) (4 Pkt.) Ermitteln Sie das zu Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe (a) gehörende komplexe magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. In welchem Polarisationszustand befindet sich das Magnetfeld? Welche Phasendifferenz haben das elektrische und das magnetische Feld?

Lösung:
Aus der Maxwell-Gleichung für ein monochromatisches Feld $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathrm{i}\omega \mathbf{B}(\mathbf{r})$ erhalten wir für das Magnetfeld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{E_0}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}. \tag{4}$$

Das Magnetfeld ist zum elektrischen Feld lediglich um $\pi/2$ phasenverschoben und trägt noch stets dieselbe Zirkularität, denn es gilt $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (\mathrm{i}/c)\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

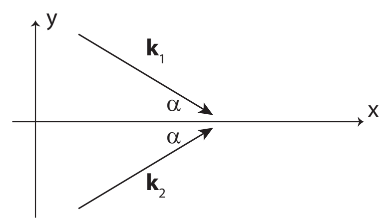
(e) (2 Pkt.) Zeigen Sie, dass Ihr soeben ermitteltes Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ und Ihr elektrisches Feld aus Aufgabe (c) transversal sind.

Lösung:
Wir berechnen das innere Produkt der beiden Felder

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{E_0^2}{c} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kr} (0 + \mathrm{i} - \mathrm{i}) = 0. \tag{5}$$

Die Felder stehen also senkrecht aufeinander.

(f) (8 Pkt.) Wir betrachten nun zwei rechtszirkular polarisierte ebene Wellen identischer Amplitude E_0 und Frequenz ω, die in der xy-Ebene unter dem Winkel α sowie $-\alpha$ zur x-Achse propagieren, wie in der folgenden Abbildung skizziert. Formulieren Sie das komplexe Feld $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ so, dass das Feld der ersten Welle im Ursprung zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet $\mathbf{E}_1(\mathbf{r} = 0, t = 0) = E_0 \mathbf{n}_z$. Formulieren Sie das komplexe Feld der zweiten Welle $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$, wobei diese einen Phasenversatz ϕ zur ersten Welle aufweise.



Lösung:
Es gilt für das Feld der ersten Welle

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = E_0 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_1\mathbf{r}} \tag{6}$$

und für jenes der zweiten

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} E_0 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_2\mathbf{r}}, \tag{7}$$

mit den Wellenvektoren $\mathbf{k}_1 = k(\cos\alpha, -\sin\alpha, 0)^T$ und $\mathbf{k}_2 = k(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)^T$.

(g) (6 Pkt.) Berechnen Sie nun die Intensität $I(\mathbf{r})$ der beiden ebenen Wellen in Abhängigkeit des Winkels α und des Phasenunterschiedes ϕ.

Lösung:
Per Definition gilt für die Intensität

$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{2Z_0} \left[|\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + 2\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*\right\} \right] \tag{8}$$

In unserem Falle gilt $|\mathbf{E}_1(\mathbf{r})|^2 = |\mathbf{E}_2(\mathbf{r})|^2 = 2E_0^2$, sowie

$$\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*\right\} = E_0^2 \cos(2\sin\alpha k y + \phi) 2\cos^2(\alpha) \tag{9}$$

und somit

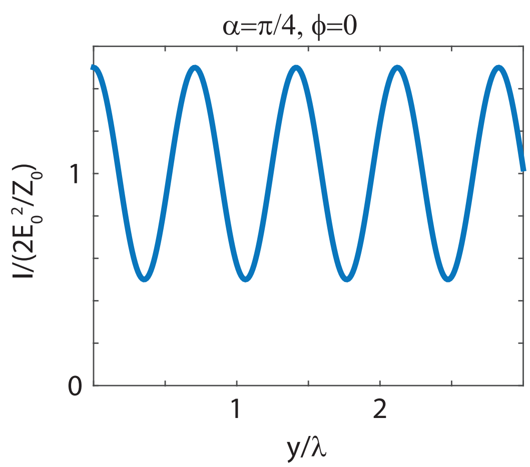
$$I(\mathbf{r}) = 2\frac{E_0^2}{Z_0} \left\{ 1 + \cos(2\sin\alpha k y + \phi)\cos^2(\alpha) \right\} \tag{10}$$

(h) (6 Pkt.) Berechnen Sie die Intensitätsverteilung entlang der y-Achse im Falle $\alpha = \pi/4$. Fertigen Sie einen Graphen dieser Intensitätsverteilung an für $\phi = 0$. Normieren Sie auf der Abszisse den Ort y mit der Wellenlänge λ und auf der Ordinate die Intensität durch $2E_0^2/Z_0$. Was geschieht mit der Intensitätsverteilung, wenn Sie die Phase ϕ ändern?

Lösung:
Im Falle $\alpha = \pi/4$ erhalten wir

$$I(y) = 2\frac{E_0^2}{Z_0}\left\{1 + \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}ky + \phi)\right\}. \tag{11}$$

Mit der Phase ϕ ändert sich die Position des Interferenzmusters entlang der y-Richtung.



(i) (2 Pkt.) Berechnen Sie die Intensitätsverteilung entlang der y-Achse im Falle $\alpha = \pi/2$. Was geschieht mit der Intensitätsverteilung, wenn Sie die Phase ϕ ändern?

Lösung:
Die Intensitätsverteilung im Falle $\alpha = \pi/2$ lautet

$$I = 2\frac{E_0^2}{Z_0}. \tag{12}$$

Die Intensität hängt also nicht vom Ort ab. Zwei gegenläufige Wellen mit gleicher Zirkularität interferieren nicht. Die Phase ϕ spielt in diesem Fall keine Rolle.

(j) (4 Pkt.) Wir verweilen noch einen Augenblick beim Falle gegenläufiger ebener Wellen ($\alpha = \pi/2$) mit gleicher Zirkularität. Zeigen Sie, dass in diesem Falle das gesamte elektrische Feld lokal linear polarisiert ist, wobei sich die Polarisationsrichtung jedoch als Funktion von y um die y-Achse dreht. Bestimmen Sie einen Ausdruck für den Winkel $\gamma(y)$, den der elektrische Feldvektor mit der z-Achse einschliesst.

Lösung:
Das elektrische Feld der gegenläufigen Wellen lautet

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = E_0\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\0\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky} + E_0\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\0\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky} = 2E_0\begin{pmatrix}\sin(ky)\\0\\\cos(ky)\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Das elektrische Feld schliesst also mit der z-Achse den Winkel $\gamma = \tan^{-1}[\sin(ky)/\cos(ky)] = ky$ ein. Je nach Konvention zur Messung positiver Winkel kann sich ein Minuszeichen im Ausdruck für γ ergeben. Wir überzeugen uns noch, was im Falle einer relativen Phase zwischen den beiden Feldern gilt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) &= E_0 \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} E_0 \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky} = \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} E_0 \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(ky+\phi/2)} + \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ky+\phi/2)} \right\} \\ &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} E_0 \begin{pmatrix} \sin(ky+\phi/2) \\ 0 \\ \cos(ky+\phi/2) \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{14}$$

so dass wir wiederum ein linear polarisiertes Feld finden mit Polarisationswinkel $\gamma(y) = ky + \phi/2$.

(k) (3 Pkt.) Formulieren Sie die Feldverteilung im Falle zweier gegenläufiger Wellen unterschiedlicher Händigkeit und gleicher Amplitude.

Lösung:
Wir belassen das Feld der ersten Welle unverändert nach Gl. (6), verwenden jedoch für jenes der zweiten eine linkszirkular polarisierte Welle

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} E_0 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \mathrm{i} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_2\mathbf{r}}. \tag{15}$$

Das Gesamtfeld ergibt sich so für $\alpha = \pi/2$ zu

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = E_0 \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky} + E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky} = 2E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} \cos(ky+\phi/2) \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

(l) (3 Pkt.) Zeigen Sie, dass das Gesamtfeld im Falle zweier gegenläufiger Wellen unterschiedlicher Händigkeit und gleicher Amplitude lokal zirkular polarisiert ist, indem Sie das reelle elektrische Feld betrachten.

Lösung:
Offenbar ist das Feld lokal zirkular polarisiert, denn das reelle Feld zu Gl. (16) lautet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re} \left\{ 2E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} \cos(ky+\phi/2) \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \right\} = 2E_0 \cos(ky+\phi/2) \begin{pmatrix} \sin(\omega t - \phi/2) \\ 0 \\ \cos(\omega t - \phi/2) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

(m) (3 Pkt.) Berechnen Sie die Intensität zweier gegenläufiger Wellen unterschiedlicher Händigkeit und gleicher Amplitude um zu zeigen, dass diese eine stehende Welle bilden. Geben Sie die Periodizität der Intensitätsverteilung der stehenden Welle als Funktion der Wellenlänge λ an.

Lösung:
Für die Intensität gilt in diesem Falle

$$I(y) = \frac{4E_0^2}{Z_0} \cos^2(ky + \phi/2). \tag{18}$$

Die Funktion $\cos^2(a)$ ist π periodisch, so dass mit $\lambda = 2\pi/k$ für die Periode gilt $d = \lambda/2$.

(n) (7 Pkt.) So wie zirkulare Polarisation durch Superposition linear polarisierter Felder mit geeignetem Phasenversatz generiert werden kann, lässt sich lineare Polarisation durch Superposition zirkular polarisierter Felder erzeugen. Formulieren Sie das gesamte komplexe elektrische Feld zweier in x-Richtung propagierender Wellen mit identischer Amplitude und relativem Phasenversatz ϕ. In der Ebene $x = 0$ und zur Zeit $t = 0$ laute das Feld der ersten Welle $E_0\mathbf{n}_z$. Eine der Wellen sei linkszirkular polarisiert, die andere rechtszirkular. Zeigen Sie, dass das Gesamtfeld linear polarisiert ist und der Polarisationswinkel relativ zur z-Achse lautet $\gamma = \phi/2$.

Lösung:
Wir verwenden unser Feld aus Gln. (6) und (15) mit $\alpha = 0$ und erhalten so das gesamte komplexe Feld

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) &= E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \right] = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right) \\ 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \end{pmatrix} \\ &= 2E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\phi/2) \\ \cos(\phi/2) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Der Winkel zur z-Achse ist gegeben durch $\tan\gamma = \frac{\sin(\phi/2)}{\cos(\phi/2)}$, so dass wir erhalten $\gamma = \phi/2$.

2 Elektromagnetische Wellen in sphärischen Koordinaten (40 Pkt.)

Aus der Vorlesung ist Ihnen bekannt, dass das (komplexe) räumliche elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ die Helmholtzgleichung $(\nabla^2 + \beta^2)\mathbf{E} = 0$ zu erfüllen hat, wobei ∇^2 der Laplace Operator ist und β die Wellenzahl. In kartesischen Koordinaten ergeben sich ebene Wellen als Lösungen der Helmholtzgleichung. In dieser Aufgabe suchen wir nach den Lösungen der Helmholtzgleichung in sphärischen Koordinaten. Einerseits üben wir so nochmals den Umgang mit einem nicht-kartesischen Koordinatensystem, andererseits stärken wir unsere Vertrautheit mit der Wellengleichung, indem uns zum Beispiel die Dispersionsrelation in zylidrischen Koordinaten begegnet. Aufgrund der Schwierigkeit, die sich durch die Vektornatur der Felder ergibt, beschränken wir uns im Folgenden auf die Lösung der Helmholtzgleichung $(\nabla^2 + \beta^2)\psi = 0$ für ein skalares Feld $\psi(r, \theta, \phi)$.

(a) (10 Pkt.) Verwenden Sie einen Separationsansatz, indem Sie $\psi(r, \theta, \phi)$ als Produkt dreier Funktionen $f(r)$, $g(\theta)$ und $h(\phi)$ schreiben. Wenden Sie sodann den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten auf $\psi(r, \theta, \phi)$ an um zu zeigen, dass die Funktion h folgende Gleichung erfüllt, wobei m eine Konstante ist

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\phi^2} + m^2 h = 0. \tag{20}$$

Lösung:
Mit dem Laplace-Operator in Kugelkoordianten lautet die Helmholtzgleichung

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = -\beta^2 \psi. \tag{21}$$

Wir gehen mit dem Separationsansatz

$$\psi(r, \theta, \phi) = f(r) g(\theta) h(\phi) \tag{22}$$

in Gl. (21) und erhalten nach Multiplikation mit $\frac{r^2 \sin^2\theta}{\psi}$ die Gleichung

$$\frac{\sin^2\theta}{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{\sin\theta}{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\phi^2} = -(\beta r \sin\theta)^2. \tag{23}$$

Der letzten Summand auf der linken Seite hängt nur von ϕ ab, während die anderen Terme von ϕ unabhängig sind, und muss somit gleich einer Konstanten sein, die wir $-m^2$ wählen, so dass gilt

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\phi^2} = -m^2 h. \tag{24}$$

(b) (4 Pkt.) Überzeugen Sie sich, dass die Funktion g die folgende Gleichung erfüllt, wobei n eine Konstante ist

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left\{\sin\theta \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\theta}\right\} + \left[n(n+1) - \left\{\frac{m}{\sin\theta}\right\}^2\right] g = 0. \tag{25}$$

Lösung:
Wir fügen Gl. (20) in Gl. (23) ein, teilen durch $\sin^2\theta$ und erhalten

$$\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) + (\beta r)^2 + \frac{1}{g \sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\theta}\right) - \left(\frac{m}{\sin\theta}\right)^2 = 0 \tag{26}$$

Die letzten beiden Terme hängen lediglich von θ ab, während der erste Term nur von r abhängt. Die Summe der beiden letzten Terme muss also gleich einer Konstanten sein, die wir $-n(n+1)$ wählen und so erhalten

$$\frac{1}{g\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left\{\sin\theta\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\theta}\right\}-\left\{\frac{m}{\sin\theta}\right\}^2=-n(n+1), \tag{27}$$

was der gesuchten Gl. (26) entspricht.

(c) (4 Pkt.) Beweisen Sie, dass die Funktion f die folgende Gleichung erfüllt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right\}+\left[(\beta r)^2-n(n+1)\right]f=0. \tag{28}$$

Lösung:
Durch Einsetzen von Gl. (27) in Gl. (26) erhalten wir

$$\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right\}+(\beta r)^2-n(n+1)=0. \tag{29}$$

(d) (5 Pkt.) Formulieren Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung Gl. (20) für h einmal unter Gebrauch trigonometrischer Basisfunktionen und einmal unter Gebrauch komplexer Exponentialfunktionen.

Lösung:
Die homogene Differentialgleichung Gl. (20) ist zweiter Ordnung in ϕ und hat darum die allgemeine Lösung

$$h(\phi)=a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}+b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi},\qquad a,b\in\mathbb{C}. \tag{30}$$

Alternativ können wir die allgemeine Lösung mit trigonometrischen Basisfunktionen formulieren

$$h(\phi)=c\sin(m\phi)+d\cos(m\phi),\qquad a,b\in\mathbb{C}. \tag{31}$$

(e) (3 Pkt.) Argumentieren Sie, warum im Elektromagnetismus typischerweise $m\in\mathbb{N}$ gilt.

Lösung:
In sphärischer Symmetrie erwarten wir eine zyklische Lösung im Azimuthalwinkel ϕ. Laut Gl. (31) muss gelten $m\in\mathbb{N}$, damit h die entsprechende 2π Periodizität aufweist.

(f) (5 Pkt.) Wir erinnern uns, dass $\psi(\mathbf{r})$ und somit auch h komplexe Felder sind. Formulieren Sie das zeitabhängige reelle Feld $h(\phi,t)$. Machen Sie sich anschaulich klar, welcher Typ von Wellen in der Zeit durch die komplexen Basisfunktionen jeweils dargestellt wird. Veranschaulichen Sie sich hierzu die Ausbreitung des reellen Feldes $h(\phi,t)$ als Funktion der Zeit. Welche Rolle spielt die "Quantenzahl" m?

Lösung:
Mit $a=a'+\mathrm{i}\,a''$ und $b=b'+\mathrm{i}\,b''$ erhalten wir für das reelle Feld

$$\mathrm{Re}\left\{h(\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}=a'\cos(m\phi-\omega t)-a''\sin(m\phi-\omega t)+b'\cos(-m\phi-\omega t)-b''\sin(-m\phi-\omega t). \tag{32}$$

Wir haben es also mit links- und rechtsherum laufenden Wellen um die z-Achse zu tun. Die Quantenzahl "m" gibt die Anzahl der Wellenberge und Täler an.

(g) (4 Pkt.) Wir wenden uns im Folgenden dem Radialteil $f(r)$ unserer Lösung zu. Bringen Sie Ihre Differentialgleichung für f in die Form der modifizierten Bessel'schen Differentialgleichung

$$a^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}a^2} + 2a \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a} + (a^2 + \gamma^2) f = 0. \tag{33}$$

Lösung:
Wir ersetzen mit $a = \beta r$ in Gl. (28). Für die Ableitungen gilt durch Nachdifferenzieren $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} = k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}$ und somit folgt Gl. (33).

Die Lösungen der Bessel'schen Differentialgleichung sind bekannt und so ergeben sich als allgemeine Lösungen der Gl. (28)

$$f(r) = A h_n^{(1)}(\beta r) + B h_n^{(2)}(\beta r), \qquad A, B \in \mathbb{C}, \tag{34}$$

wobei $h_n^{(1)}(\beta r)$ die sphärischen Hankelfunktionen der ersten und $h_n^{(2)}(\beta r)$ jene der zweiten Art sind. Die sphärischen Hankelfunktionen lassen sich nicht in einem einfachen Ausdruck formulieren, ihre genaue Gestalt ist für uns an dieser Stelle jedoch nicht relevant. Für grosse Argumente lassen sich asymptotische Ausdrücke angeben, die lauten

$$\lim_{x\to\infty} h_n^{(1)}(x) = (-\mathrm{i})^{(n+1)} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x} \tag{35}$$

$$\lim_{x\to\infty} h_n^{(2)}(x) = \mathrm{i}^{(n+1)} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x}. \tag{36}$$

(h) (5 Pkt.) Zeigen Sie durch Betrachtung des korrespondierenden reellen Feldes, dass die Lösungen $h^{(1)}(x)$ und $h^{(2)}(x)$ in der Zeit propagierende Kugelwellen darstellen und bestimmen Sie die Propagationsrichtung.

Lösung:
Es handelt sich bei $h^{(1)}(kr)$ und $h^{(2)}(kr)$ offensichtlich um radialsymmetrische Wellen, also Kugelwellen. Die Funktion $h^{(1)}(kr)$ trägt im Zeitraum einen Phasenterm $kr - \omega t$ und propagiert nach aussen, die Funktion $h^{(2)}(kr)$ erhält entsprechend einen Phasenterm $-kr - \omega t$ und propagiert zum Ursprung hin.