Übung 2

Abgabe: 08.03. bzw. 12.03.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Induktion, Polarisierung und Magnetisierung

In dieser Übung machen wir uns vertraut mit der Polarisierung als Antwort der Materie auf elektrische Felder und der Magnetisierung als Reaktion auf magnetische Felder. Nach einigen mathematischen Vorarbeiten betrachten wir eine Messmethode zur experimentellen Bestimmung der Permeabilität. Schliesslich widmen wir uns dem Beispiel eines Plattenkondesators, anhand dessen wir die Vervollständigung der Maxwell'schen Gleichungen durch den Verschiebungsstrom nachvollziehen können.

1 Mathematische Vorarbeiten (10 Pkt.)

(a) (2 Pkt.) Zeigen Sie, dass gilt $\nabla' \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{R}}{R^3}$ für $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, wobei ∇' den Gradienten bezüglich der gestrichenen Koordinaten bezeichnet.

Lösung:
Mit $r^2 = x^2+y^2+z^2$ gilt $\partial_{x'}(1/R) = (x-x')/R^3$ und ensprechend für die anderen Ableitungen.

(b) (2 Pkt.) Beweisen Sie die Identität

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f). \tag{1}$$

Lösung:
Ausführen der partiellen Ableitungen führt auf gewünschtes Resultat.

(c) (2 Pkt.) Zeigen Sie die Identität

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}). \tag{2}$$

Lösung:
Nachrechnen liefert das gewünschte Ergebnis.

(d) (2 Pkt.) Beweisen Sie die Identität

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \tag{3}$$

Lösung:
Nachrechnen liefert das gewünschte Ergebnis.

(e) (2 Pkt.) Überzeugen Sie sich, dass gilt

$$\int \mathrm{d}V(\nabla \times \mathbf{a}) = -\oint_{\partial V} \mathbf{a} \times \mathrm{d}\mathbf{A}. \tag{4}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Gauss für ein Vektorfeld $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ sowie Gl. (2).

Lösung:
Wir verwenden den Satz von Gauss für den Vektor $\mathbf{a}(\mathbf{r}) \times \mathbf{b}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathrm{d}V &= \oint (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\ \mathrm{d}\mathbf{A} \\ \int \mathbf{b}(\nabla \times \mathbf{a})\mathrm{d}V - \int \mathbf{a}(\nabla \times \mathbf{b})\mathrm{d}V &= -\oint \mathbf{b}(\mathbf{a} \times \mathrm{d}\mathbf{A}) \end{aligned} \tag{5}$$

Da der Vektor $\mathbf{b}$ konstant gewählt wurde gilt $\nabla \times \mathbf{b} = 0$ und wir erhalten die gesuchte Identität.

2 Magnetische Polarisierbarkeit und Messung der Permeabilität (60 Pkt.)

In dieser Aufgabe widmen wir uns einer magnetisierbaren Kugel in einem externen magnetischen Feld. Wir betrachten zunächst das Magnetfeld innerhalb einer homogen magnetisierten Kugel, um daraus auf den Fall einer magnetisierbaren Kugel in einem von aussen angelegten Magnetfeld zu schliessen. Abschliessend entwickeln wir eine Methode, mit der die Permeabilitätskonstante μ eines Mediums gemessen werden kann.

Wir betrachten zunächst einen beliebig geformten Körper endlicher Ausdehnung mit beliebiger Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r})$.

(a) (2 Pkt.) Verwenden Sie das Vektorpotential des magnetischen Punktdipols aus der letzten Übung um zu zeigen, dass das Vektorpotential des magnetisierten Körpers lautet

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} \mathrm{d}V', \quad \text{mit } \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \tag{6}$$

Lösung:
Der gesuchte Ausdruck ergibt sich durch die Einsicht, dass die Magnetisierung $\mathbf{M}$ eine Dipolmomentdichte darstellt und somit gilt $\mathrm{d}\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathrm{d}V$

(b) (12 Pkt.) Zeigen Sie, dass das Vektorpotential Gl. (6) geschrieben werden kann als

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_b(\mathbf{r}')}{R} \mathrm{d}V' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{K}_b(\mathbf{r}')}{R} \mathrm{d}A' \tag{7}$$

mit $\mathbf{J}_b(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$ und $\mathbf{K}_b(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}$, wobei $\mathbf{n}$ den Oberflächennormalenvektor bei $\mathbf{r}'$ bezeichnet. Offensichtlich ist also das Vektorpotential und somit auch das magnetische Feld eines magnetisierten Körpers jenes eines Körpers mit einer Stromdichte $\mathbf{J}_b$ im Inneren sowie einer Flächenstromdichte $\mathbf{K}_b$ auf der Oberfläche des Körpers.

Lösung:
Wir verwenden zunächst die in Aufgabe 1(a) gezeigte Identität um das Vektorpotential umzuformen

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \left(\nabla' \frac{1}{R}\right)\right] \mathrm{d}V'. \tag{8}$$

Mit ∇' ist der Gradient bezüglich $\mathbf{r}'$ bezeichnet. Mithilfe der Produktregel aus 1(b) erhalten wir durch partielle Integration

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int \mathrm{d}V' \, \frac{1}{R} \left[\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')\right] - \int \mathrm{d}V' \, \left[\nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R}\right)\right] \right\}. \tag{9}$$

Dank des Resultats aus Aufgabe 1(e) können wir weiter umformen zum gewünschten Ergebnis

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int \mathrm{d}V \, \frac{1}{R} \left[\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')\right] + \oint \frac{1}{R} \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathrm{d}\mathbf{A}'\right] \right\}. \tag{10}$$

(c) (7 Pkt.) Zeigen Sie nun, dass das Magnetfeld $\mathbf{B}$ im Inneren einer homogen magnetisierten Kugel mit Magnetisierung $\mathbf{M}$ lautet

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3}\mu_0 \mathbf{M}. \tag{11}$$

Hinweis: Innerhalb einer homogen magnetisierten Kugel gilt $\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) = 0$. Somit ist das Feld in einer solchen Kugel allein durch die Oberflächenströme bestimmt. Dieser Fall kann beschrieben werden als eine rotierenden Kugel mit konstanter Oberflächenladungsdichte σ und Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Es gilt der Zusammenhang $\mathbf{M} = \sigma R \boldsymbol{\omega}$. Im Inneren einer solchen Kugel mit Radius R lautet das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 R \sigma}{3}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \text{for } |\mathbf{r}| < R. \tag{12}$$

Lösung:
Das Feld im Inneren der Kugel berechnen wir aus dem gegebenen Vektorpotential

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 R \sigma}{3} \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{2\mu_0 R \sigma}{3} \boldsymbol{\omega} = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} \tag{13}$$

(d) (7 Pkt.) Zeigen Sie, dass das Feld ausserhalb einer homogen magnetisierten Kugel gerade jenem eines Punktdipols am Kugelmittelpunkt entspricht, wie Sie es in Übung 1 kennengelernt haben. Wie lautet das Dipolmoment dieses Dipols?
Hinweis: Wie in der vorhergehenden Teilaufgabe, modellieren wir die homogen magnetisierte Kugel durch eine rotierende Kugel mit Oberflächenladung. Ausserhalb einer solchen Kugel mit Radius R, Winkelgeschwindigkeit ω, und Oberflächenladungsdichte σ lautet das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \text{for } |\mathbf{r}| > R. \tag{14}$$

Zudem gilt nach wie vor $\mathbf{M} = \sigma R \boldsymbol{\omega}$.

Lösung:
Das Vektorpotential ausserhalb der Kugel lautet nach dem Hinweis mit der Ersetzung $\mathbf{M} = \sigma R \boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 R^3}{3r^3}(\mathbf{M} \times \mathbf{r}). \tag{15}$$

Dies entspricht gerade dem Vektorpotential des Dipols aus Übung 1

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \tag{16}$$

mit dem Dipolmoment $\mathbf{m} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{M}$.

(e) (12 Pkt.) Wir gehen nun davon aus, dass die Kugel von Vakuum umgeben ist und die Magnetisierung der Kugel durch ein äusseres Magnetfeld $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ induziert wurde. Die Magnetisierbarkeit des Kugelmaterials sei χ_m. Im Folgenden suchen wir das Magnetfeld innerhalb der Kugel in Anwesenheit eines äusseren Feldes $\mathbf{B}_{\text{ext}}$. Zeigen Sie, dass das Gesamtfeld innerhalb der Kugel lautet

$$\boldsymbol{B}_i \;=\; \frac{3\,\mu}{\mu+2}\,\boldsymbol{B}_{\text{ext}}\,. \tag{17}$$

Hinweis: Nehmen Sie in erster Näherung an, dass die Magnetisierung der Kugel proportional zum angelegten externen Feld ist laut $\mathbf{M}_0 = \chi_m \mathbf{B}_{\text{ext}}/(\mu_0 \mu)$. Berechnen Sie nun das sich laut Gl. (11) aus dieser Magnetisierung ergebende Magnetfeld $\mathbf{B}_1$ im Inneren der Kugel.

Schliessen Sie sodann von diesem Magnetfeld wiederum auf die Magnetisierung $\mathbf{M}_1$, um daraus erneut ein resultierendes Magnetfeld $\mathbf{B}_2$ zu berechnen. Bilden Sie den Grenzwert $\sum_0^N \mathbf{B}_n$ für $N \to \infty$ dieser Iteration, um das Gesamtfeld innerhalb der Kugel $\mathbf{B}_i$ zu finden. Erinnern Sie sich in diesem Zusammenhang an die geometrische Reihe.

Lösung:
Die Magnetisierung in einem linearen Medium lautet $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$. Mit $\mathbf{H}_{\text{int}} = \mathbf{B}_{\text{ext}}/(\mu_0\mu)$ ergibt sich so für unsere Kugel in erster Näherung die Magnetisierung $\mathbf{M}_0 = \frac{\chi_m}{\mu_0\mu}\mathbf{B}_{\text{ext}}$. Diese Magnetisierung produziert wiederum ein Feld $\mathbf{B}_1 = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}_0$ und daraus das Feld $\mathbf{B}_1 = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}_0 = \frac{2\chi}{3\mu}\mathbf{B}_{\text{ext}}$. Wir sehen, dass sich nach n-Iterationen ergibt $\mathbf{B}_n = \left(\frac{2\chi}{3\mu}\right)^n \mathbf{B}_{\text{ext}}$. Summation der einzelnen Felder ergibt mit der geometrischen Reihe $\sum_0^\infty x^n = 1/(1-x)$ und mit $\mu = 1 + \chi_m$ im Grenzwert

$$\mathbf{B}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{B}_n = \mathbf{B}_{\text{ext}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2\chi}{3\mu}\right)^n = \mathbf{B}_{\text{ext}} \frac{3\mu}{\mu+2}. \tag{18}$$

(f) (6 Pkt.) Berechnen Sie die Magnetisierung $\mathbf{M}$ der Kugel im Magnetfeld und bestimmen Sie daraus die magnetische Polarisierbarkeit α_m, die definiert ist als $\mathbf{m} = \alpha_m \mathbf{H}_{\text{ext}}$.

Lösung:
Wie in der vorheringen Aufgabe festgestellt gilt $\mathbf{M}_n = \frac{\chi_m}{\mu\mu_0}\mathbf{B}_n$. Die gesamte Magnetisierung ist somit

$$\mathbf{M} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{M}_n = \frac{\chi_m}{\mu\mu_0} \sum \mathbf{B}_n = \frac{3\mathbf{B}_{\text{ext}}}{\mu_0} \frac{\mu-1}{\mu+2} = 3\mathbf{H}_{\text{ext}} \frac{\mu-1}{\mu+2}, \tag{19}$$

da das H-Feld ausserhalb der Kugel lautet $\mathbf{H}_{\text{ext}} = \mathbf{B}_{\text{ext}}/\mu_0$, denn im Vakuum gilt $\mu = 1$. Für das Dipolmoment gilt laut Teilaufgabe (d) somit $\mathbf{m} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{M} = 4\pi R^3 \frac{\mu-1}{\mu+2}\mathbf{H}_{\text{ext}}$ und die Polarisierbarkeit lautet

$$\alpha_m = 4\pi R^3 \frac{\mu-1}{\mu+2}. \tag{20}$$

Wir widmen uns nun einer Methode zur Bestimmung der Permeabilität μ eines Materials, das zu einer Kugel geformt wurde. Die Kugel werde am Äquator mit einer Induktionsspule mit Windungszahl N versehen. Die Normale zur Spulenfläche sei parallel zum äusseren Feld. Das äussere Feld $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ werde zum Zeitpunkt $t_{\text{off}} = 0$ ausgeschaltet. Integriert man die induzierte Spannung, so erhält man als Messgrösse den Spannungsstoss

$$UT \; = \; \int_0^\infty U(t)\,\mathrm{d}t \; . \tag{21}$$

(g) (6 Pkt.) Bringen Sie das Faraday'sche Gesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ in Integralform, um daraus die in der Spule induzierte Spannung $U(t)$ herzuleiten.

Lösung:
Anwendung des Stokes'schen Satzes ergibt das Faraday'sche Gesetz in Integralform

$$\int_{\partial A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\partial_t \int_A \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \tag{22}$$

So erhalten wir für die induzierte Spannung

$$U(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi = -N\frac{\partial}{\partial t}\iint_A \boldsymbol{B}_i \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A = -N\pi R^2 \frac{\mathrm{d}B_i(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{23}$$

da das B-Feld auf der Oberfläche A homogen ist.

(h) (5 Pkt.) Berechnen Sie den Spannungsstoss, der sich nach dem Ausschalten des extern angelegten Magnetfeldes $\mathbf{B}_{\mathrm{ext}}$ ergibt, als Funktion der Parameter N, R und der Materialkonstanten μ der Kugel.

Lösung:
Der Spannungsstoss UT lautet

$$UT \;=\; \int_0^\infty U(t)\,\mathrm{d}t \;=\; -N\pi R^2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}B_i(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \;=\; N\pi R^2\,[B_i(0) - B_i(\infty)]\;. \tag{24}$$

Für grosse Zeiten $t \to \infty$ ist das Magnetfeld ausgeschaltet, d.h. $B_i(\infty) = 0$, und am Beginn des Intervalls gilt $B_i(0) = 3\mu B_{\mathrm{ext}}/(\mu + 2)$. Wir erhalten dann durch Einsetzen die Gleichung für den Spannungsstoss

$$UT \;=\; N\pi R^2\,B_{\mathrm{ext}}\,\frac{3\mu}{\mu+2}\;. \tag{25}$$

(i) (3 Pkt.) Leiten Sie einen Ausdruck her für die Permeabilität in Abhängigkeit des Spannungsstosses, der Windungszahl N und des Kugelradius R.

Lösung:
Auflösen nach μ ergibt

$$\mu \;=\; \frac{2\,UT}{3\,N\pi R^2\,B_{\mathrm{ext}} \;-\; UT}. \tag{26}$$

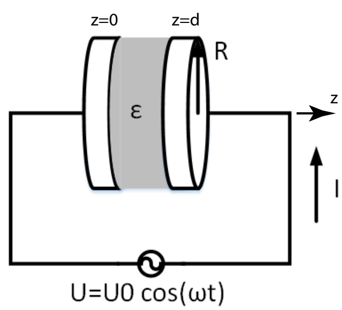
3 Plattenkondensator **(30 Pkt.)**

Maxwell's genialer Einfall, der die nach ihm benannten Gleichungen der Elektrodynamik komplettierte, bestand in der Hinzufügung des Verschiebungsstromes zum Ampère'schen Gesetz, das somit lautet

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}. \tag{27}$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{j}$ die freie Stromdichte. Wir betrachten im Folgenden einen einfachen Versuchsaufbau zum Test von Maxwell's Gleichung.

An einem Plattenkondensator bestehend aus zwei parallelen, kreisförmigen Platten mit Radius R, gelegen bei $z = 0$ und $z = d$ senkrecht und zentriert zur z-Achse, werde eine Wechselspannung $U = U_0 \cos(\omega t)$ angelegt (siehe Abbildung). Der Plattenkondensator sei mit einem Dielektrikum mit Permittivität ε und Permeabilität $\mu = 1$ gefüllt und besitze die Kapazität C. Mit der aufgrund der angelegten Wechselspannung $U(t)$ variierenden Ladung $Q(t)$ auf den Kondensatorplatten ändert sich auch das elektrische Feld $\mathbf{E}$ zwischen den beiden Platten. Das elektrische Wechselfeld führt zu einer Verschiebung von Polarisationsladungen im Dielektrikum: Es fliesst ein Wechselstrom $I(t)$, der sich aus Verschiebungsstrom und Polarisationsstrom zusammensetzt.



(a) (3 Pkt.) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und das Verschiebungsfeld $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ im Inneren des Plattenkondensators unter Vernachlässigung von Randeffekten durch die endliche Plattengrösse.

Lösung:
Aufgrund der Symmetrie ist das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten konstant. Per Definition gilt für die Spannung $U = \int \mathbf{dl} \cdot \mathbf{E}$ und somit für das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = \mathbf{n}_z U/d = \frac{U_0}{d} \cos(\omega t) \mathbf{n}_z \tag{28}$$

Das Verschiebungsfeld ergibt sich aus $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}$.

(b) (5 Pkt.) Bestimmen Sie die Kapazität des Plattenkondensators als Funktion seiner Fläche A, dem Plattenabstand d, sowie der Permittivität des Mediums ε und der des Vakuums ε_0.

Lösung:
Wir schliessen eine Kondensatorplatte, die die Ladung Q aufgrund der angelegten Spannung U trage, in eine geschlossene Oberfläche ein. Anwendung des Gauss'schen Gesetzes $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ ergibt in Integralform mit dem Gauss'schen Satz $\varepsilon\varepsilon_0 E\, A = Q$, da $Q = \int_V \mathrm{d}V\, \rho$. Aus

der vorherigen Aufgabe wissen wir $E = U/d$ und so erhalten wir für die Kapazität $C = Q/U$ gerade

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{d}. \tag{29}$$

(c) (2 Pkt.) Wie lautet der Strom $I(t)$, der im Stromkreis fliesst, ausgedrückt durch U_0, C und ω?

Lösung:
Es gilt

$$I \;=\; \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \;=\; C\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t} \;=\; -CU_0\omega \sin\omega t. \tag{30}$$

(d) (7 Pkt.) Berechnen Sie das Magnetfeld $\mathbf{H}(r)$ um den leitenden Draht entlang der z-Achse als Funktion des Abstandes zum Draht r und des Stromes I. Vernachlässigen Sie dazu die Felder, die durch die anderen Drahtteile generiert werden.

Lösung:
Ausserhalb des Kondensators verschwindet das Verschiebungsfeld und es gilt $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$.

Mit dem Satz von Stokes erhalten wir in Integralform

$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot \mathbf{ds} \;=\; \int_A \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}a \tag{31}$$

Weiterhin gilt für den Strom

$$I = \int_A \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\; \mathrm{d}a \tag{32}$$

So erhalten wir für die Magnetfeldstärke $\mathbf{B} = \mathbf{H}/(\mu_0 \mu)$ im Vakuum $\mu = 1$ durch Integration entlang eines Kreises mit Radius r

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \;=\; \int_0^{2\pi} r\, B_\phi\, d\phi \;=\; 2\pi r B_\phi \;=\; \mu_0 I. \tag{33}$$

Somit gilt für das B-Feld

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{n}_\phi \tag{34}$$

und für das H-Feld

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r}\mathbf{n}_\phi. \tag{35}$$

(e) (7 Pkt.) Bestimmen Sie das Magnetfeld $\mathbf{H}(r)$ als Funktion von I im Bereich $0 < z < d$ sowohl für Abstände $r < R$ also auch für $r > R$ von der z-Achse. Überzeugen Sie sich, dass die Felder für $r > R$ für die Bereiche $0 < z < d$ und ausserhalb identisch sind.

Lösung:
Im Bereich $0 < z < d$ gilt $\mathbf{j} = 0$ und $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{U_0}{d} \cos(\omega t)\mathbf{n}_z$ und somit $2\pi r H_\phi = -r^2 \pi \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \omega}{d} U_0 \sin(\omega t)$, woraus folgt

$$H_\phi = \frac{Ir}{2\pi R^2}. \tag{36}$$

Für $r > R$ finden wir

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r}, \tag{37}$$

was genau dem Resultat ausserhalb von $0 < z < d$ aus Gl. (35) entspricht.

(f) (3 Pkt.) Laut Maxwell werden Magnetfelder nicht nur von Leitungsströmen sondern auch von zeitlich veränderlichen elektrischen Feldern erzeugt. Unser Bespiel bietet darum eine Gelegenheit, um Maxwell's Idee experimentell zu verifizieren, indem eine kleine Spule (so dass das Magnetfeld über die Spulenfläche als konstant angenommen werden kann) mit Fläche A und N Windungen am Rand der Kondensatorplatten bei $r = R$ im Bereich $0 < z < d$ platziert wird. Die Flächennormale der Spule sei parallel zum Magnetfeld und die Umgebung sei Vakuum ($\varepsilon = 1,\ \mu = 1$). Welche induzierte Wechselspannung U_{ind} erwarten Sie in der Spule?

Lösung:
Der Fluss in der Spule lautet $\Phi_m = NAB_\phi$. Laut dem Induktionsgesetz erwarten wir die Spannung

$$U_{\mathrm{ind}} = -NA\frac{\mathrm{d}B_\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0}{2\pi R}NA\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0}{2\pi R}NA\,C\,U_0\,\omega^2\cos\omega t. \tag{38}$$

(g) (3 Pkt.) Zeigen Sie, dass durch den Wechselstrom die Ladungserhaltung gewährleistet ist. Leiten Sie dazu aus Gl. (27) und dem Gauss'schen Gesetz für das Verschiebungsfeld $\mathbf{D}$ die Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial_t \rho$ her.

Lösung:
Wir wenden zunächst die Divergenz auf Gl. (27) an und erinnern uns, dass die Divergenz jedes Rotationsfeldes verschwindet, so dass folgt

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} + \nabla \cdot \partial_t \mathbf{D}. \tag{39}$$

Nach dem Satz von Schwarz gilt zusammen mit dem Gauss'schen Gesetz $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

$$\nabla \cdot \partial_t \mathbf{D} = \partial_t \nabla \cdot \mathbf{D} = \partial_t \rho, \tag{40}$$

womit die Kontinuitätsgleichung gezeigt wäre.