Übung 1

Abgabe: 01.03. bzw. 05.03.2019

Elektromagnetische Felder und Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Elektro- und Magnetostatik

In dieser Übung befassen wir uns mit den Grundlagen der Elektro- und Magnetostatik. In der ersten Aufgabe erinnern wir uns an einige mathematische Werkzeuge, insbesondere der Vektoranalysis, deren Beherrschung für diese Vorlesung unabdinglich sind. Die zweite Aufgabe befasst sich mit einem fundamentalen Problem der Magnetostatik, dem Magnetfeld einer von einem zeitlich konstanten Strom durchflossenen Leiterschleife. In der dritten Aufgabe widmen wir uns dem Potential einer elektrisch homogen geladenen Kreisscheibe. In den beiden letzten Aufgaben üben wir insbesondere den Umgang mit verschiedenen Koordinatensystemen.

1 Mathematische Grundlagen (20 Pkt.)

(a) (5 Pkt.) Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld $\mathbf{V} = (x^2 + z, x - y, yz)^T$ und die Fläche, die durch die Parabel $y + x^2 = 4$ und die x-Achse berandet wird.

Lösung:
Der Satz von Stokes lautet $\oint_{\partial A} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_A \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{V})$, wobei ∂A die Kurve ist, die die Fläche A begrenzt. Die Rotation von $\mathbf{V}$ lautet $\nabla \times \mathbf{V} = (z, 1, 1)^T$. Wir berechnen zunächst das Linienintegral entlang der Parabel $y = 4 - x^2$ und der x-Achse

$$L = \int\limits_{x=-2}^{2} \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \mathbf{V} = \int\limits_{\substack{x=-2\\ y=4-x^2\\ z=0}}^{2} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ x-y \\ yz \end{pmatrix} + \int\limits_{\substack{x=2\\ y=z=0}}^{-2} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ x-y \\ yz \end{pmatrix} = -32/3. \tag{1}$$

Für das Flächenintegral gilt unter Beachtung der Umlaufrichtung mit $\mathbf{n}_A = (0, 0, -1)^T$ in der Ebene $z = 0$

$$F = \int\limits_A (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_A = -\int\limits_{x=-2}^{2} \int\limits_{y=0}^{4-x^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -32/3. \tag{2}$$

Somit gilt $L = F$ und der Satz von Stokes wäre verifiziert. Lösungen mit anderer Umlaufrichtung und entsprechenden Vorzeichen für L und F sind natürlich ebenso korrekt.

(b) (5 Pkt.) Verifizieren Sie den Satz von Gauss für das Vektorfeld $\mathbf{F} = (ax^2, by^2, cz^2)^T$ und das Volumen $V = \{\mathbf{r} : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$.
Hinweis: Symmetrien und Periodizitäten der zu integrierenden Funktionen sollten Ihre Rechnungen erleichtern.

Lösung:
Der Satz von Gauss lautet $\oint_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{F} = \int_V \mathrm{d}V(\nabla \cdot \mathbf{F})$, wobei ∂V die Oberfläche des Volumens V ist. Die Divergenz des Feldes lautet $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2ax + 2by + 2cz$. In Kugelkoordinaten gilt $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$, $z = r \cos\theta$, und mit dem Volumenelement $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \mathrm{d}R \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta$ ergibt das Volumenintegral

$$I = \int_V \mathrm{d}V(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \int_{r=0}^{R} \mathrm{d}R \int_{\phi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, 2r^3(a \sin^2\theta \cos\phi + b \sin^2\theta \sin\phi + c \sin\theta \cos\theta) = 0. \tag{3}$$

Die Evaluierung des Intergrals wird erleichtert durch Beachtung der Tatsache, dass die Integrale $\cos\phi$ und $\sin\phi$ über eine Periode verschwinden. Eine kurze Betrachtung des Terms $\sin\theta\cos\theta$ ergibt, dass dessen Integral aufgrund seiner Periodizität ebenso verschwindet. Wir evaluieren nun das Oberflächenintergral mit dem infinitesimalen Oberflächenelement $\mathrm{d}\mathbf{a} = R^2 \sin\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$ und erhalten

$$\begin{aligned} A = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{F} &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \mathrm{d}\theta\ R^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} aR^2 \sin^2\theta \cos^2\phi \\ bR^2 \sin^2\theta \sin^2\phi \\ cR^2 \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta\ R^4(a \sin^4\theta \cos^3\phi + b \sin^4\theta \sin^3\phi + c \cos^3\theta \sin\theta) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Somit gilt $I = A$ und der Satz von Gauss ist erfüllt.

(c) (2 Pkt.) Beweisen Sie, dass Rotationsfelder (hinreichend oft partiell differenzierbarer Funktionen) stets divergenzfrei sind.

Lösung:
Es ist zu zeigen, dass gilt $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0\ \forall \mathbf{A}$. Ausführen der Vektoroperatoren und Anwendung des Satzes von Schwarz (partielle Ableitungen dürfen vertauscht werden) führt direkt zum gewünschten Ergebnis.

(d) (2 Pkt.) Beweisen Sie, dass Gradientenfelder (hinreichend oft partiell differenzierbarer Funktionen) stets rotationsfrei sind.

Lösung:
Es ist zu zeigen, dass gilt $\nabla \times (\nabla A) = 0\ \forall A$. Ausführen der Vektoroperatoren und Anwendung des Satzes von Schwarz (partielle Ableitungen dürfen vertauscht werden) führt direkt zum gewünschten Ergebnis.

(e) (3 Pkt.) Formulieren Sie die allgemeine *komplexe* Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$(\partial_x^2 + k^2) f(x) = 0, \tag{5}$$

mit $k \in \mathbb{R}$.

Lösung:
Die allgemeine Lösung lautet

$$f(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \tag{6}$$

mit Koeffizienten $A, B \in \mathbb{C}$.

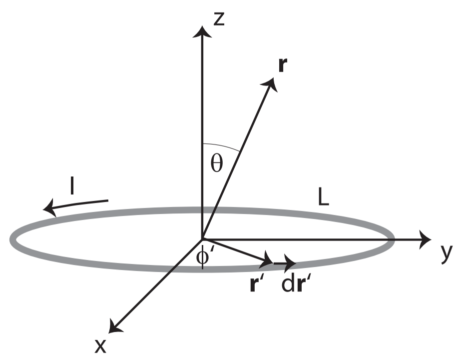
(f) (3 Pkt.) Zeigen Sie, dass (für $A = a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$) gilt $\mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}) = c\cos(kx + \phi)$ (mit $c, \phi \in \mathbb{R}$). Bestimmen Sie $c(a, b)$ und $\phi(a, b)$.

Lösung:
Wir schreiben $A = c\mathrm{e}^{i\phi}$ mit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\phi = \tan^{-1}(b/a)$. Wir finden so

$$\mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}) = \mathrm{Re}(c\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+\phi)}) = c\cos(kx + \phi). \tag{7}$$

2 Der statische magnetische Dipol (50 Pkt.)

In dieser Aufgabe betrachten wir das magnetische Feld, das durch eine runde Leiterschleife mit Radius L, gelegen um den Ursprung in der Ebene $z = 0$, generiert wird. Wir leiten einen analytischen Ausdruck für das Feld in einem beliebigen Punkt her, die Auswertung des erscheinenden Integrals werden wir jedoch einer numerischen Methode überlassen müssen. Als Fall von grosser praktischer Bedeutung betrachten wir das generierte Feld in grossem Abstand von der Leiterschleife, aus dem diese wie ein magnetischer Punktdipol erscheint.



Wir beginnen mit dem Biot-Savart Gesetz, welches das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ am Orte $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ beschreibt, das von einem zeitlich konstanten Strom I entlang des Pfades C generiert wird

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\mathrm{d}\mathbf{r'} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}, \qquad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r'}. \tag{8}$$

(a) (4 Pkt.) Formulieren Sie zunächst den Ortsvektor zum stromführenden Draht $\mathbf{r'}$ sowie das Pfadelement $\mathrm{d}\mathbf{r'}$ unter Verwendung des Radius L und der Koordinate ϕ'.

Lösung:
Der Ortsvektor zum stromführenden Draht lautet

$$\mathbf{r'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \cos\phi' \\ \sin\phi' \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Im betrachteten Falle lautet das differentielle Pfadelement im kartesischen Koordinatensystem

$$\mathrm{d}\mathbf{r'} = L\mathrm{d}\phi' \begin{pmatrix} -\sin\phi' \\ \cos\phi' \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

(b) (4 Pkt.) Berechnen Sie den Betrag des Abstandsvektors $|\mathbf{R}|$.

Lösung:

$$\begin{aligned} R = \left|\mathbf{r} - \mathbf{r'}\right| &= \sqrt{(x - L\cos\phi')^2 + (y - L\sin\phi')^2 + z^2} \\ &= \sqrt{r^2 + L^2 - 2L(x\cos\phi' + y\sin\phi')} \end{aligned} \tag{11}$$

(c) (5 Pkt.) Evaluieren Sie das Kreuzprodukt $\mathrm{d}\mathbf{r'} \times \mathbf{R}$ und formulieren Sie einen Ausdruck für das Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Eine allgemeine Auswertung des Integrals ist nicht erforderlich und lediglich numerisch möglich.

Lösung:
Wir berechnen das Kreuzprodukt

$$\mathrm{d}\mathbf{r'} \times \mathbf{R} = \mathrm{d}\phi' \, L \begin{pmatrix} z\cos\phi' \\ z\sin\phi' \\ L - x\cos\phi' - y\sin\phi' \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Für das Feld am Beobachtungspunkt ergibt sich so

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I L}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \frac{1}{[r^2 + L^2 - 2L(x\cos\phi' + y\sin\phi')]^{3/2}} \begin{pmatrix} z\cos\phi' \\ z\sin\phi' \\ L - x\cos\phi' - y\sin\phi' \end{pmatrix}. \tag{13}$$

(d) (5 Pkt.) Wir betrachten im Folgenden das Feld in grossem Abstand von der Leiterschleife. In diesem Limit repräsentiert die Schleife einen magnetischen Punktdipol. Entwickeln Sie zunächst den Ausdruck $1/R^3$ in führender Ordnung in L.

Lösung:
Für grosse Abstände gilt

$$[r^2 + L^2 - 2L(x\cos\phi' + y\sin\phi')]^{-3/2} = \frac{1}{r^3}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{L^2 - 2Lx\cos\phi' - 2Ly\sin\phi'}{r^2}\right) + \ldots\right]. \tag{14}$$

Der Term mit L^2 kann in führender Ordnung vernachlässigt werden.

(e) (12 Pkt.) Evaluieren Sie nun das Magnetfeld $\mathbf{B}(x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten, indem Sie das in Aufgabe (c) formulierte Integral in führender Ordnung in L auswerten.

Lösung:
Wir erhalten für die Komponenten des Feldes in führender Ordnung in L/r

$$\begin{aligned}
B_x &= \frac{\mu_0 I L}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \frac{z}{r^3}\cos\phi' \left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{L^2 - 2Lx\cos\phi' - 2Ly\sin\phi'}{r^2}\right) + \ldots\right] && (15)\\
&= \frac{3\mu_0 I L^2}{4r^5} xz, && (16)\\
B_y &= \frac{3\mu_0 I L^2}{4r^5} yz, && (17)\\
B_z &= \frac{\mu_0 I L}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' (L - x\cos\phi' - y\sin\phi') \left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{L^2 - 2Lx\cos\phi' - 2Ly\sin\phi'}{r^2}\right) + \ldots\right] && (18)\\
&\approx \frac{\mu_0 I L}{4\pi r^3}\left[2\pi L - \frac{3x^2}{r^2} L \int_0^{2\pi} \cos^2\phi' \mathrm{d}\phi' - \frac{3y^2}{r^2} L \int_0^{2\pi} \sin^2\phi' \mathrm{d}\phi'\right] && (19)\\
&= \frac{\mu_0 I L^2}{4r^3}\left(2 - 3\frac{x^2 + y^2}{r^2}\right). && (20)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass das Integral über eine volle Periode der trigonometrischen Funktionen verschwindet.

(f) (10 Pkt.) Zeigen Sie, dass das Magnetfeld des Dipols mit Dipolmoment $m = \pi L^2 I$ in sphärischen Koordinaten lautet

$$B_r = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \cos\theta, \tag{21}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin\theta, \tag{22}$$

$$B_\phi = 0, \tag{23}$$

wobei der Polarwinkel θ wie üblich zur z-Achse und der Azimuthalwinkel zur x-Achse gemessen wird. Bemühen Sie für die Transformation der Einheitsvektoren falls notwendig ein geeignetes Nachschlagewerk.

Lösung:
Für die Einheitsvektoren gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_x &= \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{n}_r + \cos\theta\cos\phi\;\mathbf{n}_\theta - \sin\phi\;\mathbf{n}_\phi,\\
\mathbf{n}_y &= \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{n}_r + \cos\theta\sin\phi\;\mathbf{n}_\theta + \cos\phi\;\mathbf{n}_\phi,\\
\mathbf{n}_z &= \cos\theta\;\mathbf{n}_r - \sin\theta\;\mathbf{n}_\theta.
\end{aligned} \tag{24}$$

Die Koordinaten lauten $x = r\cos\phi\sin\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$ und $z = r\cos\theta$. Mit den Einheitsvektoren und der Definition des magnetischen Dipolmoments $m = \pi L^2 I$ erhalten wir nach etwas länglicher aber einfacher Rechnung das Feld in sphärischen Koordinaten

$$B_r = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \cos\theta, \tag{25}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin\theta, \tag{26}$$

$$B_\phi = 0. \tag{27}$$

(g) (4 Pkt.) Vergewissern Sie sich durch explizite Rechnung, dass das Magnetfeld des Dipols die Maxwell'sche Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ erfüllt. Verwenden Sie hierzu den Divergenzoperator in Kugelkoordinaten, den Sie an geeigneter Stelle nachschlagen können.

Lösung:
In sphärischen Koordinaten gilt für den Divergenzoperator

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}. \tag{28}$$

Angewandt auf das Magnetfeld erhalten wir

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 m}{2\pi r^4}\cos\theta + \frac{\mu_0 m}{2\pi r^4}\cos\theta = 0. \tag{29}$$

(h) (6 Pkt.) Da die Divergenz jedes Rotationsfeldes verschwindet (s. erste Aufgabe), existiert ein Vektorpotential $\mathbf{A}$ mit der Eigenschaft $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Das Vektorpotential eines statischen magnetischen Punktdipols mit Dipolmoment $\mathbf{m}$ lautet

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}. \tag{30}$$

Überprüfen Sie mithilfe des Vektorpotentials Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe (e).

Lösung:
Das Vektorpotential eines Dipols $\mathbf{m} = m\mathbf{n}_z$ lautet

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Um die Rotation zu berechnen benötigen wir die Ableitungen vom Typ

$$\partial_z r^{-3} = -3z/r^5. \tag{32}$$

Wir erhalten so

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^5} \begin{pmatrix} 3xz \\ 3yz \\ 2r^2 - 3(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \tag{33}$$

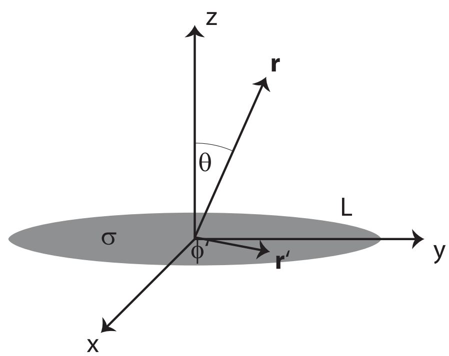
was genau oben berechnetem Magnetfeld entspricht.

3 Potential einer geladenen Scheibe (30 Pkt.)

Wir berechnen in dieser Aufgabe das elektrostatische Potential einer homogen elektrisch geladenen Scheibe. Die Scheibe befinde sich in der Ebene $z = 0$, habe den Radius L und trage die Flächenladungsdichte σ. Laut dem Coulomb'schen Gesetz gilt für das Potential einer Ladungsdichteverteilung $\rho(\mathbf{r})$ mit endlicher Ausdehnung

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho \, \mathrm{d}V'}{R}, \tag{34}$$

wobei der Beobachtungspunkt hier in Zylinderkoordinaten beschrieben sei durch $\mathbf{r} = (x, y, z)^T = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)^T$ und der zu integrierende Ortsvektor durch $\mathbf{r'} = (x', y', z')^T = (r'\cos\varphi', r'\sin\varphi', z')^T$. Für den Abstandsvektor gilt somit $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r'}|$.



(a) (4 Pkt.) Berechnen Sie die Länge des Abstandsvektors $|\mathbf{R}|$.

Lösung:
Da die Scheibe in der xy-Ebene liegt, gilt

$$\mathbf{r'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'\cos\varphi' \\ r'\sin\varphi' \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Für die Länge des Abstandsvektors gilt nun mit $d^2 = r^2 + z^2$

$$R = \left|\mathbf{r} - \mathbf{r'}\right| = \begin{vmatrix} r\cos\varphi - r'\cos\varphi' \\ r\sin\varphi - r'\sin\varphi' \\ z \end{vmatrix} = \left[r^2 + z^2 + r'^2 - 2rr'\left(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

(b) (2 Pkt.) Formulieren Sie das Potential ϕ. Eine Auswertung des Integrals ist nicht erforderlich.

Lösung:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \int_0^L \frac{\mathrm{d}r'\, r'}{\left[r^2 + z^2 + r'^2 - 2rr'\left(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{37}$$

(c) (3 Pkt.) Berechnen Sie das Potential entlang der z-Achse.
Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Substitution zum Lösen des Integrals.

Lösung:
Entlang der z-Achse gilt

$$R = \sqrt{z^2 + r'^2}. \tag{38}$$

Für das Potential finden wir

$$\phi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \int_0^L \mathrm{d}r' \frac{r'}{\sqrt{z^2 + r'^2}} = \frac{\sigma\,|z|}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{1 + \frac{L^2}{z^2}} - 1 \right). \tag{39}$$

Das Integral lässt sich leicht mit der Substitution $a = \sqrt{z^2 + r'^2}$ lösen.

(d) (5 Pkt.) Wir nähern nun das Potential an einem beliebigen Raumpunkt für grosse Abstände im Vergleich zur Scheibengrösse. Entwickeln Sie dazu die inverse Länge des Abstandsvektors $1/|\mathbf{R}|$ in quadratischer Ordnung in r'/d. Verwenden Sie den Parameter $d = \sqrt{r^2 + z^2}$ um Ihre Notation zu erleichtern.

Lösung:
Für die Länge des Abstandvektors gilt mit $d^2 = r^2 + z^2$ durch Entwicklung des Ausdrucks aus Teilaufgabe (a)

$$\frac{d}{R} = 1 + \frac{r' r[\sin(\varphi')\sin(\varphi) + \cos(\varphi')\cos(\varphi)]}{d^2} + \frac{r'^2}{2} \left(\frac{3r^2[\sin(\varphi')\sin(\varphi) + \cos(\varphi')\cos(\varphi)]^2}{d^4} - \frac{1}{d^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{d}\right)^3. \tag{40}$$

(e) (6 Pkt.) Berechnen Sie das Potential an einem beliebigen Raumpunkt bis zur zweiten nichtverschwindenden Ordnung in der Scheibengrösse L.

Lösung:
Durch Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{d} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \int\limits_0^{L} \mathrm{d}r' r' \frac{d}{R} \\ &= \frac{\sigma L^2}{4\varepsilon_0 d} \left[1 - \frac{L^2}{4d^2} \left(\frac{3}{2} \frac{r^2}{d^2} \right) \right]. \end{aligned} \tag{41}$$

Hierbei haben wir für die Integration die Periodizät der trigonometrischen Funktionen und die Mittelwerte ihrer Quadrate beachtet.

(f) (3 Pkt.) Extrahieren Sie aus dem soeben berechneten Potential das elektrische Feld in sphärischen Koordinaten. Verwenden Sie dazu den entsprechenden Operator in Kugelkoordinaten.

Lösung:
Das elektrische Feld errechnet sich nach $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Wir erkennen, dass unser Parameter d gerade der Radiuskoordinate in sphärischen Koordinaten entspricht. Der Gradientenoperator in sphärischen Koordinaten lautet

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{42}$$

Somit erhalten wir für das elektrische Feld in der gemachten Näherung

$$E_d = \frac{\sigma L^2}{4\varepsilon_0 d^2}\left(1 - \frac{3L^2}{4d^2}\right) \tag{43}$$

$$E_\theta = E_\phi = 0. \tag{44}$$

(g) (4 Pkt.) Vergewissern Sie sich, dass Ihr Ausdruck für das Potential entlang der z-Achse aus Teilaufgabe (c) in zweiter nichtverschwindender Ordnung in der Scheibengrösse mit Ihrem Ergebnis für das Potential an einem beliebigen Raumpunkt (e) übereinstimmt.

Lösung:
Wir entwickeln unser Ergebnis entlang der z-Achse bis zur zweiten nichtverschwindenen Ordnung

$$\phi = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma z\left(\sqrt{1+\frac{L^2}{z^2}} - 1\right) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left(\frac{L^2}{z} - \frac{L^4}{4z^3}\right) \tag{45}$$

Entlang der z-Achse gilt $d = z$ und somit stimmt unser Ergebnis bis zur zweiten nichtverschwindenen Ordnung mit Gl. (41) überein.

(h) (3 Pkt.) Überzeugen Sie sich, dass das Potential der geladenen Scheibe in Abständen viel grösser als der Scheibendurchmesser gerade dem Potential einer Punktladung am Ursprung entspricht. Berechnen Sie die Ladung Q dieser äquivalenten Punktladung.

Lösung:
In grossem Abstand lautet das Potential

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z} \tag{46}$$

mit der Gesamtladung $Q = \pi L^2 \sigma$.