

Übung 11

Abgabe: 21.05. bzw. 24.05.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Gauss'scher Strahl, Feldwinkelspektrum

1 Fouriertransformation und Faltung (10 Pkt.)

Wir überzeugen uns im Folgenden von einigen hilfreichen Eigenschaften der Delta-Funktion, der Fourier-Transformation und der Faltung. Sofern nicht anders angegeben, seien die Integrationsgrenzen in dieser Aufgabe stets von $-\infty$ bis ∞ . Wir haben die Fouriertransformation einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ definiert als

$$\mathfrak{F}[f] = \hat{f}(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int dx_1 \dots \int dx_n f(x_1, \dots, x_n) e^{-i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)} \quad (1)$$

und die inverse Fouriertransformation als

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}] = f(x_1, \dots, x_n) = \int dk_1 \dots \int dk_n \hat{f}(k_1, \dots, k_n) e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)}. \quad (2)$$

Es gilt $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}[f(\{x_i\})] = f(\{x_i\})$. Ausserdem ist die Faltungsoperation zwischen den Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$ und $g(x_1, \dots, x_n)$ definiert als

$$(f * g)(x_1, \dots, x_n) = \int dy_1 \dots \int dy_n f(y_1, \dots, y_n) g(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n). \quad (3)$$

Die Dirac'sche Delta-Funktion ist über die Faltungsoperation definiert als

$$f(x) = (f * \delta)(x). \quad (4)$$

(a) (4 Pkt.) Zeigen Sie, dass die Delta-Funktion dargestellt werden kann als

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int dk_x e^{ik_x(x-x_0)}. \quad (5)$$

(b) (6 Pkt.) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation der Faltung zweier Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$ und $g(x_1, \dots, x_n)$ proportional zum Produkt der Fouriertransformationen der gefalteten Funktionen ist

$$\mathfrak{F}[(f * g)] \propto \mathfrak{F}[f] \cdot \mathfrak{F}[g], \quad (6)$$

wobei der Vorfaktor von Ihnen geeignet zu bestimmen ist.

(c) (opt.) Beweisen Sie, dass die Fouriertransformation des Produktes einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ mit einer Funktion $g(x_1, \dots, x_n)$ gleich der Faltung der Fouriertransformierten der Funktionen ist

$$\mathfrak{F}[f \cdot g] = \mathfrak{F}[f] * \mathfrak{F}[g]. \quad (7)$$

2 Der Gauss'sche Strahl (35 Pkt.)

In der Vorlesung haben Sie den Gauss'schen Strahl kennengelernt. Er dient als paradigmatisches Konstrukt um Fokussierung und Beugung von elektromagnetischen Feldern zu beschreiben. In dieser Aufgabe betrachten wir einige Limitation des Gauss'schen Strahls, führen Korrekturen ein und beschäftigen uns mit seiner Intensität. Sie haben die Feldverteilung des Gauss'schen Strahls ermittelt, indem Sie von einer Gauss'schen Feldverteilung in der Ebene $z = 0$ ausgegangen sind

$$\mathbf{E}(x, y, z = 0) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}}. \quad (8)$$

Im Prinzip kann der Gauss'sche Strahl jegliche Polarisation tragen (linear, zirkular, oder elliptisch), die durch den in der xy -Ebene liegenden Polarisationsvektor \mathbf{E}_0 gegeben ist. Gehen Sie in dieser Aufgabe von linearer Polarisation der Form $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{n}_x$ aus.

- (opt.) Berechnen Sie das Feldwinkelspektrum $\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z)$ des Gauss'schen Strahls in der Ebene $z = 0$.
- (opt.) Wenden Sie den Propagator des freien Raumes an, um das Feldwinkelspektrum $\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z)$ in einer beliebigen Ebene $z = \text{const.}$ zu ermitteln.
- (opt.) Zeigen Sie durch Fouriertransformation des Feldwinkelspektrums $\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z)$, dass das Feld im Realraum an einem beliebigen Punkt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ lautet

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{\mathbf{E}_0 e^{ikz}}{1 + 2iz/(kw_0^2)} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \frac{1}{1 + 2iz/(kw_0^2)} \right]. \quad (9)$$

- (5 Pkt.) Bringen Sie das Feld aus Gl. (9) in die Form

$$\mathbf{E}(\rho, z) = \mathbf{E}_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[i \left(kz - \eta(z) + k \frac{\rho^2}{2R(z)} \right) \right]. \quad (10)$$

Legen Sie Ihre Rechenschritte detailliert dar.

- (4 Pkt.) Zeigen Sie, dass der Gauss'sche Strahl die Maxwell'sche Divergenzgleichung für das elektrische Feld im quellfreien Raum verletzt, indem Sie die Divergenz des Feldes in Gl. (10) berechnen.

Wir betrachten ab sofort und für den Rest der Aufgabe einen schwach fokussierten Gauss'schen Strahl nahe seines Fokus, wo gilt

$$\mathbf{E}_f(\rho, z) = \mathbf{E}_0 \exp \left[-\frac{\rho^2}{w_0^2} \right] \exp [ikz]. \quad (11)$$

- (6 Pkt.) Stellen Sie die Divergenzfreiheit des Gauss'schen Strahls (in der Nähe des Fokus) her, indem Sie eine passende Feldkomponente E_z einführen.
- (8 Pkt.) Berechnen Sie das magnetische Feld \mathbf{H} in der Nähe des Fokus eines schwach fokussierten Gauss'schen Strahls. Es lautet in guter Näherung mit von Ihnen passend zu bestimmenden Vorfaktoren c_i (die von Z, y, k und w_0 abhängen können)

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 E_x \\ c_2 E_x \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Rechtfertigen Sie von Ihnen gemachte Näherungen sauber!

Hinweis: Für einen schwach fokussierten Strahl gilt $w_0 k \gg 1$. Weiterhin interessieren wir uns für die Felder in der Nähe des Fokus, so dass gelte $x, y \lesssim w_0$.

(h) (4 Pkt.) Zeigen Sie, dass der Poyntingvektor des Gauss'schen Strahls lautet

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2Z} |E_x|^2 \mathbf{n}_z. \quad (13)$$

(i) (4 Pkt.) Wie lautet die Intensität $I(x, y, z = 0)$ des Gauss'schen Strahls in der Fokusebene?

(j) (4 Pkt.) Berechnen Sie die Leistung in einem Gauss'schen Strahl $P(E_0, w_0, Z)$ in einem Medium mit Wellenimpedanz Z .

3 Die Slot-Antenne (55 Pkt.)

Eine vom Aufbau sehr simple Antenne, gerne bei Radaranwendungen unter rauen Bedingungen eingesetzt, ist die Slot-Antenne. Sie besteht aus schlitzförmigen Aperturen (Slots), die in einen Resonator eingebracht sind. Während wir die Theorie elektromagnetischer Resonatoren erst später in der Vorlesung kennenlernen, können wir mit unserem Wissen über das Feldwinkelspektrum bereits die Funktionsweise der Slot-Antenne verstehen. Die Designparameter der Slot-Antenne sind einerseits die Geometrie und die Anordnung der Aperturen und andererseits die Phasen und Amplituden der Felder in jenen Aperturen. In dieser Aufgaben betrachten wir, wie einfache Abstrahlcharakteristiken generiert werden können.

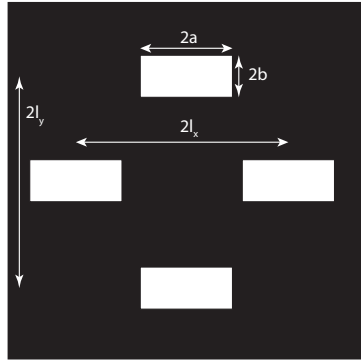
In der Ebene $z = 0$ befindet sich eine ideal leitende, unendlich dünne Platte. In dieser Platte befindet sich eine rechteckige Apertur mit Dimensionen $2a$ in x -Richtung und $2b$ in y -Richtung. Die Apertur werde aus der Richtung $-z$ beleuchtet von einer ebenen Welle $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$.

- (a) (3 Pkt.) Berechnen Sie das Feldwinkelspektrum in der Aperturebene. Nehmen Sie zunächst an, dass die beleuchtende ebene Welle parallel zur z -Achse propagiert. Formulieren Sie Ihr Ergebnis unter Verwendung der Fläche der Apertur sowie mithilfe der sinc-Funktion, die definiert ist als

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \quad (14)$$

- (b) (4 Pkt.) Berechnen Sie das Fernfeld $\mathbf{E}_\infty(s_x, s_y)$ in grossem Abstand r von der Apertur.
- (c) (4 Pkt.) Formulieren Sie die Intensität $I(x, y, z = d)$ auf einem Schirm in der Ebene $z = d \gg \lambda, a, b, x, y$.
- (d) (5 Pkt.) Erstellen Sie einen zweidimensionalen Intensitätsgraphen $I(x, y, z = d)$ für den Fall $a = 5\lambda/(2\pi)$, $b = 4\lambda/(2\pi)$, in dem Sie die Intensität in Falschfarben darstellen. Normieren Sie die Intensität mit der Maximalintensität in der Ebene $z = d$. Tragen Sie auf den horizontalen Achsen die dimensionslosen Größen x/d und y/d in einem geeigneten Bereich auf. Beschriften Sie Ihre Achsen und vergessen Sie nicht, Ihre beschriftete Farbskala mit anzugeben.
- (e) (1 Pkt.) Wir lassen nun eine s -polarisierte ebene Welle mit Amplitude E_0 in der xz -Ebene unter dem Winkel α zur z -Achse auf die rechteckige Apertur einfallen. Formulieren Sie die Feldverteilung der ebenen Welle $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.
- (f) (4 Pkt.) Formulieren Sie das Feldwinkelspektrum der Apertur im Falle der darauf schräg einfallenden ebenen Welle.
- (g) (4 Pkt.) Berechnen Sie die Intensitätsverteilung $I(x, y, z = d)$ auf einem Schirm in der Ebene $z = d \gg \lambda, a, b, x, y$. Beschreiben Sie in einigen Worten, welchen Effekt eine linear vom Ort abhängige Phase des Feldes in der Aperturebene auf die Abstrahlcharakteristik der Slot-Antenne hat.
- (h) (5 Pkt.) Erstellen Sie einen zweidimensionalen Intensitätsgraphen $I(x, y, z = d)$ für den Fall $a = 5\lambda/(2\pi)$, $b = 4\lambda/(2\pi)$ und $\alpha = \pi/10$, in dem Sie die Intensität in Falschfarben darstellen. Beschriften Sie Ihren Graphen aussagekräftig.

- (i) (4 Pkt.) Wir wenden uns nun einer Slot-Antenne mit vier (gleichartigen) Schlitzen zu. Jeder Schlitz habe noch stets die Dimensionen $2a$ in x -Richtung und $2b$ in y -Richtung, die Schlitze seien jedoch jeweils um den Abstand l_x bzw. l_y vom Ursprung verschoben. Wir definieren die Aperturfunktion A , die gerade gleich 1 sei an jenen Stellen, wo die Apertur eine Öffnung hat. Die Aperturfunktion sei gleich Null überall sonst. Stellen Sie die Aperturfunktion der Vierfachapertur durch die Faltung der Aperturfunktion A_1 einer am Ursprung gelegenen rechteckigen Einzelapertur mit passend gewählten (zweidimensionalen) Dirac'schen Delta-Funktionen dar.



- (j) (8 Pkt.) Berechnen Sie das Feldwinkelspektrum $\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z = 0)$ der Vierfachapertur.
- (k) (4 Pkt.) Berechnen Sie das Fernfeld $\mathbf{E}_\infty(s_x, s_y)$ der Vierfachapertur.
- (l) (4 Pkt.) Bestimmen Sie die Intensität $I_\infty(x, y, z = d)$ in einer Ebene $z = d$ in grossem Abstand von der Apertur.
- (m) (5 Pkt.) Erstellen Sie einen zweidimensionalen Intensitätsgraphen $I(x, y, z = d)$ für den Fall $a = 5\lambda/(2\pi)$, $b = 4\lambda/(2\pi)$, sowie $l_x = 50\lambda/(2\pi)$, $l_y = 80\lambda/(2\pi)$, in dem Sie die Intensität in Falschfarben darstellen. Beschriften Sie Ihren Graphen aussagekräftig und normieren Sie Ihr Ergebnis auf die Maximalintensität.