Übung 8

Abgabe: 30.04. bzw. 03.05.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Green'sche Funktionen, Dipolfelder

1 Nah- und Fernfelder des strahlenden Dipols (25 Pkt.)

In der Vorlesung haben Sie die Green'sche Funktion des Helmholtz-Operators hergeleitet, aus der sich unmittelbar die elektromagnetischen Felder eines zeitharmonisch oszillierenden Dipols ergeben. Dieser Umstand beruht auf der Tatsache, dass der Punktdipol gerade die punktförmige Stromverteilung darstellt, deren Felder duch die Green'sche Funktion produziert werden. In dieser Aufgabe machen wir uns mit der radialen Abhängigkeit der Dipolstrahlung vertraut. Dazu betrachten wir die Nah-, Zwischen- und Fernfelder.

Im ersten Teil versichern wir uns, dass lediglich die Fernfelder elektromagnetische Energie transportieren, bevor wir im zweiten Teil eine Relation zwischen den Nahfeldern eines zeitharmonischen und eines statischen elektrischen Dipols herstellen. Wir nutzen die Gelegenheit, um das Kalkül der Green'schen Funktionen zu wiederholen.

In spärischen Koordinaten und unter Verwendung sphärischer Einheitsvektoren lautet das elektrische Feld eines am Ursprung gelegenen und entlang der z-Richtung mit Frequenz ω oszillierenden Dipols mit Dipolmoment p in einem Medium mit Materialparametern ε und μ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}k^2 \begin{pmatrix} \cos\theta\left(\frac{2}{k^2r^2} - \frac{2\mathrm{i}}{kr}\right) \\ \sin\theta\left(\frac{1}{k^2r^2} - \frac{\mathrm{i}}{kr} - 1\right) \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{n}_r,\mathbf{n}_\theta,\mathbf{n}_\phi} . \qquad (1)$$

Mit dem Subskript hinter dem Vektor geben wir an, dass es sich um Vektorkomponenten bezüglich der sphärischen Einheitsvektoren handelt.

(a) (4 Pkt.) Zeigen Sie unter Verwendung einer Maxwell-Gleichung, dass das komplexe Magnetfeld des Dipols $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ in Kugelkoordinaten (unter Verwendung sphärischer Einheitsvektoren) lautet

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z}\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}k^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\mathrm{i}}{kr} - 1 \end{pmatrix}_{\mathbf{n}_r,\mathbf{n}_\theta,\mathbf{n}_\phi} . \qquad (2)$$

(b) (4 Pkt.) Berechnen Sie den zeitgemittelten Poynting-Vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ des Dipolfeldes. Geben Sie für alle entstehenden Terme an, aus welchen Feldkomponenten sie sich ergeben (z.B. "NF,FF" für Interferenzterme aus Nah- und Fernfeld). Zeigen Sie mathematisch, dass schlussendlich lediglich Fernfelder zum Poyntingvektor beitragen und argumentieren Sie, warum dies aus Gründen der Energieerhaltung notwendig ist.

(c) (4 Pkt.) Wir wenden uns nun dem Nahfeld des zeitharmonischen Dipols zu. Formulieren Sie die komplexen elektrischen und magnetischen Nahfelder des strahlendes Dipols in sphärischen Koordinaten unter Verwendung sphärischer Einheitvektoren. Formulieren Sie das zeitabhängige reelle elektrische Nahfeld des strahlenden Dipols mit rellem Dipolmoment $p \in \mathbb{R}$.

Wir vergleichen das Nahfeld des zeitharmonisch oszillierenden Dipols nun mit dem Feld eines statischen elektrischen Dipols. Hierzu leiten wir dessen Feld nochmals in Analogie zur Herleitung der Felder des strahlenden Dipols her. Es gilt

$$\nabla \cdot \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Im quellfreien Raum existiert ein (elektrostatisches) Potential Φ, so dass gilt $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Somit finden wir die Poissongleichung

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{4}$$

Dies ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung vom Typ

$$\mathcal{L}\mathbf{A} = \mathbf{B}, \tag{5}$$

wobei der Differentialoperator hier der Laplace-Operator ist, so dass gilt $\mathcal{L} = \nabla^2$. Zur allgemeinen Lösung suchen wir die Green'sche Funktion G_L des Laplace-Operators, für die gelten soll

$$\nabla^2 G_L(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{6}$$

(d) (6 Pkt.) Machen Sie sich klar, dass der Laplace-Operator gerade der Helmholtz-Operator im Limes verschwindender Frequenz ist. Somit muss die Green'sche Funktion des Laplace-Operators gerade gleich der Green'schen Funktion des Helmholtz-Operators im Limes verschwindender Frequenz sein und es muss gelten

$$G_L(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{7}$$

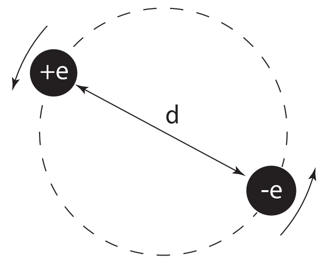
Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass Gl. (7) die Gl. (6) erfüllt.

(e) (4 Pkt.) Berechnen Sie das Potential eines statischen Dipols gelegen am Ursprung, ausgerichtet entlang der z-Achse, mithilfe der Green'schen Funktion des Laplace-Operators. Dieser Dipol kann angenähert werden durch die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}) = q[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}')]$ mit $\mathbf{r}' = (0, 0, d/2)^T$ im Limes $d \to 0$ und gleichzeitig $p = qd = \text{const.}$

(f) (3 Pkt.) Berechnen Sie das elektrische Feld des statischen Dipols in sphärischen Koordinaten unter Verwendung sphärischer Einheitsvektoren und vergleichen Sie es in einigen Sätzen mit dem Nahfeld des zeitharmonisch oszillierenden Dipols.

2 Die Positronium-Antenne (75 Pkt.)

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts hatte man das Atommodell entwickelt zum Bild eines positiv geladenen Kernes, den negativ geladene Elektronen auf Bahnen umkreisen. Dieses Modell steht in fundamentalem Widerspruch mit dem Maxwell'schen Elektromagnetismus, der seit dem Ende des 19. Jahrhunderts etabliert wurde. Erst die Entwicklung der Quantenmechanik erlaubte den Entwurf eines Atommodells, das mit dem Elektromagnetismus in Einklang zu bringen war.



In dieser Aufgabe beleuchten wir den Widerspruch des Rutherford'schen Atommodells. Er beruht darauf, dass beschleunigte Ladungen elektromagnetische Energie abstrahlen. Ein Elektron auf einem Orbit sollte also seine Energie abstrahlen und schlussendlich in den Kern stürzen. Während das einfachste in der Natur vorkommende Atom das Wasserstoffatom ist, betrachten wir der Einfachheit halber ein Positroniumatom, welches aus einem Elektron mit Ladung $-e$ und seinem Antiteilchen mit gleicher Masse, dem Positron mit Ladung $+e$ besteht. Die beiden Teilchen umkreisen den gemeinsamen Schwerpunkt, der im Ursprung liege. Ausserdem liege die Rotationsebene in der xy-Ebene und wir betrachten das Problem in einem hypothetischen Medium mit Materialparametern ε und μ.

(a) (2 Pkt.) Formulieren Sie das zeitabhängige Dipolmoment $\mathbf{p}(t)$ des Positroniums als Superposition eines zeitharmonischen Dipols entlang der x- und eines entlang der y-Achse. Wählen Sie die Anfangsbedingung so, dass gilt $\mathbf{p}(t = 0) = p\mathbf{n}_x$. Bezeichnen Sie den Betrag des Dipolmoments des Positroniums ab sofort schlicht mit $p \in \mathbb{R}$. Formulieren Sie ausserdem das komplexe Dipolmoment $\mathbf{p}$ des Positroniums.

(b) (4 Pkt.) Nachdem wir das komplexe Dipolmoment des Positroniums bestimmt haben, wenden wir uns den abgestrahlten Feldern zu. Da wir uns schlussendlich für die abgestrahlte Leistung interessieren, beschränken wir uns auf die Fernfelder. Formulieren Sie das komplexe Fernfeld $\mathbf{E}_x$ eines entlang der x-Achse oszillierenden Dipols (gelegen im Ursprung) in kartesischen Koordinaten.

(c) (8 Pkt.) Schreiben Sie das Fernfeld des Dipols $\mathbf{E}_x$ aus der vorherigen Teilaufgabe in sphärischen Koordinaten unter Verwendung der sphärischen Einheitsvektoren, für die gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_x &= \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{n}_r + \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{n}_\theta - \sin\phi\,\mathbf{n}_\phi, \\
\mathbf{n}_y &= \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{n}_r + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{n}_\theta + \cos\phi\,\mathbf{n}_\phi, \\
\mathbf{n}_z &= \cos\theta\,\mathbf{n}_r - \sin\theta\,\mathbf{n}_\theta.
\end{aligned} \tag{8}$$

(d) (8 Pkt.) Formulieren Sie das elektrische Fernfeld eines Dipols, der entlang der y-Achse mit Kreisfrequenz ω oszilliert, einmal in kartesichen Koordinaten unter Verwendung kartesischer

Einheitsvektoren und einmal in Kugelkoordinaten unter Verwendung sphärischer Einheitsvektoren.

(e) (12 Pkt.) Berechnen Sie das magnetische Fernfeld $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ des entlang der x-Richtung und das des entlang der y-Richtung oszillierenden Dipols.
Hinweis: Sie erhalten das Magnetfeld aus dem elektrischen Feld unter Verwendung einer Maxwell'schen Rotationsgleichung. Sie erleichtern sich die Rechnung, wenn Sie verwenden, dass die Fernfelder lokal ebene Wellen sind.

(f) (8 Pkt.) Berechnen Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ für das Positronium.

(g) (6 Pkt.) Erstellen Sie einen Graphen der Abstrahlcharakteristik des Positroniums. Verwenden Sie hierzu die Polardarstellung, in der Sie den Winkel θ zur z-Achse auftragen und den (geeignet normierten) zeitgemittelten Poyntingvektor als radiale Grösse.

(h) (8 Pkt.) Berechnen Sie nun die gesamte abgestrahlte Leistung des Positroniums, indem Sie den Poyntingvektor über eine geeignet gewählte Oberfläche integrieren. Zeigen Sie, dass die Strahlungsleistung des Positroniums zweimal der Strahlungsleistung eines einfachen Dipols mit Dipolmoment p in einem homogenen Medium entspricht.
Hinweis: Das Integral $\int_0^\pi \mathrm{d}x\ \sin x \cos^2 x = 2/3$ sollte hilfreich sein.

(i) (5 Pkt.) Betrachten Sie das elektromagnetische Feld, das vom Positronium in z-Richtung abgestrahlt wird. Bestimmen Sie den Polarisationszustand und veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis anhand der Abstrahlcharakteristik und der Polaristation der Felder eines einzelnen Dipols in wenigen Sätzen.

(j) (4 Pkt.) Wie ist der Polarisationszustand der Felder entlang der x- und der y-Richtung? Kommentieren Sie Ihr Resultat hinsichtlich der Polarisation der abgestrahlten Felder eines einzelnen (linearen) Dipols.

(k) (6 Pkt.) Nehmen Sie an, dass wir eine einfache mechanische Antenne als Analog zum Positronium gebaut haben. Unsere Antenne bestehe aus zwei Kugeln (jede mit Masse m), die durch einen isolierenden Stab im Abstand d gehalten werden. Ausserdem wurden die Kugeln durch einen Generator mit den Ladungen $\pm q$ versehen. Wir versetzen die Anordnung zur Zeit $t = 0$ in Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0. Wir befinden uns im Vakuum und es gebe keinerlei mechanische Reibungsverluste. In einigem Abstand haben wir eine Empfangsantenne aufgebaut, mit der wir die Frequenz der eintreffenden Strahlung detektieren können. Berechnen Sie die Winkelfrequenz $\omega(t)$ bei der unsere Empfangsantenne Signale empfängt. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Einheiten und überzeugen Sie sich, dass Ihr Resultat von d unabhängig ist.

(l) (4 Pkt.) Sie haben in der vorhergehenden Teilaufgabe gefunden, dass die Rotationsgeschwindigkeit der Antenne in der Zeit abnimmt. Beschreiben Sie in wenigen Sätzen, welche "Reibungskraft" hier am Werk ist, die die Rotation bremst, und was ihr Ursprung ist.