Übung 7

Abgabe: 12.04. bzw. 16.04.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Energiefluss, Potentiale

1 Energieerhaltung an Grenzflächen (50 Pkt.)

Laut dem Poynting Theorem ist mit der Propagation elektromagnetischer Strahlung stets ein Energiefluss verbunden. Die in der Sonne durch nukleare Fusionsprozesse erzeugte Energie wird beispielsweise durch elektromagnetische Strahlung zur Erde transportiert. Ebenso ist auch jeglicher Informationsaustausch in drahtlosen Netzwerken stets mit einem Energiefluss vom Sender zum Empfänger verbunden. Formal ist dieser Energiefluss durch den Poynting Vektor $\mathbf{S}$ beschrieben. Für ein monochromatisches Feld ergibt sich der zeitliche Mittelwert des Poynting Vektors aus den komplexen Feldamplituden nach

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})\}. \tag{1}$$

In verlustfreien Medien ($\varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$) muss die Strahlungsenergie erhalten sein. Dies gilt natürlich insbesondere an Grenzflächen zwischen verlustfreien Medien. Wir betrachten in dieser Aufgabe den Energietransport über eine Grenzfläche zwischen einem Medium 1 mit Materialkonstanten ε_1 und μ_1 im Halbraum $z < 0$ und einem Medium 2 (ε_2 und μ_2) im Halbraum $z > 0$.

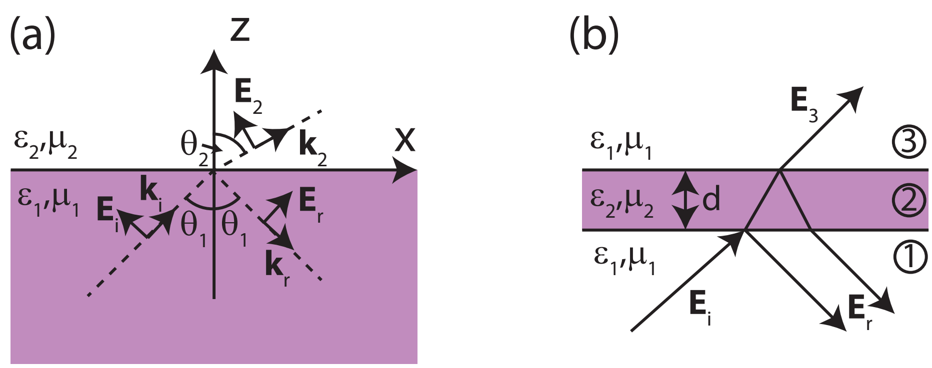

Abbildung 1: (a) Eine p-polarisierte ebene monochromatische Welle trifft unter dem Winkel θ_1 aus einem Medium 1 mit Materialparametern ε_1, μ_1 auf eine Grenzfläche mit einem Medium 2 mit ε_2, μ_2 auf. Die Einfallsebene sei die $y = 0$ Ebene. (b) Schichtsystem mit Material 2 der Dicke d eingebettet zwischen Material 1 (unten) und Material 3 (oben), wobei die Materialien 1 und 3 gleich seien.

Vom Medium 1 falle eine monochromatische ebene Welle unter einem Winkel θ_1 zur Grenzflächennormalen in der $y = 0$ Ebene ein, wie in Abb. 1(a) gezeigt. Der Poynting Vektor im Medium j sei $\langle \mathbf{S}_j \rangle$ und seine z-Komponente $\langle \mathbf{S}_j \rangle_z$. Wir überzeugen uns im Folgenden (exemplarisch für ein p-polarisiertes Feld), dass der Energiefluss normal zur Grenzfläche über diese hinweg erhalten ist, so dass gilt

$$\langle \mathbf{S}_2 \rangle \cdot \mathbf{n}_z = \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot \mathbf{n}_z. \tag{2}$$

(a) (8 Pkt.) Formulieren Sie unter Verwendung der Fresnel-Koeffizienten das einfallende p-polarisierte elektrische Feld $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ mit komplexer Amplitude E_0, sowie das reflektierte Feld $\mathbf{E}_r(\mathbf{r})$ und das transmittierte Feld $\mathbf{E}_t(\mathbf{r})$ in Vektorschreibweise. Wie lautet das Gesamtfeld $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ im Halbraum 1? Ersetzen Sie sämtliche Winkel durch die Parallelkomponenten k_{x1}, k_{x2} sowie die z-Komponenten k_{z1}, k_{z2} der Wellenvektoren. Welche Relation gilt zwischen k_{x1} und k_{x2}?

(b) (4 Pkt.) Berechnen Sie die magnetischen Felder $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$ (aus $\mathbf{H}_i(\mathbf{r})$ und $\mathbf{H}_r(\mathbf{r})$) sowie $\mathbf{H}_t(\mathbf{r})$.

(c) (4 Pkt.) Zeigen Sie, dass der Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche im Medium 1 lautet

$$\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r}) \rangle_z = \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{Z_1} \frac{k_{z1}}{k_1} \left(1 - |r^p|^2\right). \tag{3}$$

(d) (2 Pkt.) Berechnen Sie den Energiefluss im Halbraum 1 in z-Richtung im Falle von Totalreflexion an der Grenzfläche. Betrachten Sie dazu den aus der Vorlesung bekannten Ausdruck für den Reflexionskoeffizienten. Begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich.

(e) (4 Pkt.) Zeigen Sie, dass der Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche im Medium 2 lautet

$$\langle \mathbf{S}_2(\mathbf{r}) \rangle_z = \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{Z_2} \frac{\mathrm{Re}(k_{z2})}{k_2} |t^p|^2 . \tag{4}$$

(f) (2 Pkt.) Berechnen Sie den Energiefluss im Halbraum 2 in z-Richtung im Falle von Totalreflexion an der Grenzfläche. Was bedeutet Ihr Ergebnis für den Energietransport durch evaneszente Felder?

(g) (5 Pkt.) Zeigen Sie nun, dass der Energiefluss normal zur Grenzfläche über diese hinweg erhalten ist, also Gl. (2) gilt. Benutzen Sie dabei die aus der Vorlesung bekannten Ausdrücke für die Fresnel-Koeffizienten.

Wir bringen nun hinter die Grenzfläche zwischen den Medien 1 und 2 in einem Abstand d eine weitere Grenzfläche zu einem Medium 3 mit denselben Materialparametern wie das Medium 1, wie in Abb. 1(b) gezeigt. Es lässt sich zeigen, dass für den Transmissionskoeffizienten durch die beiden Grenzflächen gilt

$$t_{\mathrm{ges}} = \frac{t_{12} t_{21} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{1 - r_{21}^2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}, \tag{5}$$

mit der innerhalb des Mediums 2 aufgenommenen Phase $\varphi = k_{z2} d$.

(h) (2 Pkt.) Argumentieren Sie ohne Rechnung, wie das Verhältnis der Energieflüsse $\frac{\langle \mathbf{S}_3(\mathbf{r}) \rangle_z}{\langle \mathbf{S}_1(\mathbf{r}) \rangle_z}$ senkrecht zu den Grenzflächen in den Medien 1 und 3 lauten muss.

(i) (4 Pkt.) Berechnen Sie den Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche im Medium 3 in Abhängigkeit von der Amplitude des einfallenden Feldes E_0, seinem Einfallswinkel θ_1, der Wellenimpedanz Z_1 und dem gesamten Transmissionskoeffizienten t_{ges}.

(j) (3 Pkt.) Welchen Wert muss t_{ges} für $d \to 0$ annehmen? Beweisen Sie Ihre Behauptung, indem Sie die aus der Vorlesung bekannten Fresnel-Koeffizienten in Gl. (5) einsetzen.

Ein Fabry-Pérot Etalon ist ein optisches Filterelement, bei dem die Transmission durch eine dünne Schicht als Funktion der Frequenz der einfallenden Strahlung durch Interferenzeffekte periodische Maxima zeigt. Hier betrachten wir nun den Fall, dass $n_1 > n_2$ gilt und somit bei Einfallswinkeln grösser als $\theta_1 = \sin^{-1}(n_2/n_1)$ Totalreflexion an der ersten Grenzfläche auftritt, die durch die Präsenz der zweiten Grenzfläche frustiert werden kann. Wir vertiefen in diesem Aufgabenteil das Verständnis, das uns in der Aufgabe 3 der Übung 6 erarbeitet haben.

(k) (4 Pkt.) Zeigen Sie, dass im Fall von frustrierter Totalreflexion die Gesamttransmission $|t_{\mathrm{ges}}|^2$ für Schichtdicken $d \gtrsim \lambda_0$ näherungsweise exponentiell abfällt mit

$$|t_{\mathrm{ges}}|^2 = |t_{12}|^2 \, |t_{21}|^2 \, \mathrm{e}^{-2|k_{z2}|d}. \tag{6}$$

(l) (6 Pkt.) Erstellen Sie einen Graphen von $|t_{\mathrm{ges}}|^2$ als Funktion der Filmdicke in Einheiten der Vakuumwellenlänge d/λ_0 für die drei Einfallswinkel $\theta_1 = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$. Beschriften Sie Ihre Achsen und erstellen Sie eine aussagekräftige Legende sowie einen Titel. Nehmen Sie einen Vakuumspalt an, der von Glas mit den Materialparametern $\varepsilon_1 = 2.25$ und $\mu_1 = 1$ umgeben ist. In welchem Winkelbereich zeigt der Film Fabry-Pérot Resonanzen und in welchem Winkelbereich beobachten Sie frustierte Totalreflexion?

(m) (2 Pkt.) Argumentieren Sie, warum der Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche im Medium 2, also $\langle \mathbf{S}_2(\mathbf{r}) \rangle_z$, auch im Falle von Totalreflexion endlich sein muss. In der Aufgabe (f) haben Sie gezeigt, dass im Falle von Totalreflexion durch die evaneszente Welle auf der Seite des optisch dünneren Mediums keinerlei Energie normal zur Grenzfläche transportiert wird. Nun haben wir jedoch für den Fall frustrierter Totalreflexion gefunden, dass aufgrund der Energieerhaltung im Medium 2 ein endlicher Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche bestehen muss. Innerhalb der Schicht ist jedoch die Wellenzahl k_{z2} zweifelsohne noch stets imaginär und die Felder in der Schicht darum senkrecht zur Grenzfläche evaneszent. Wie kann plötzlich doch durch den Spalt der Dicke d Energie fliessen, wenn darin nur evaneszente Felder bestehen?
Hinweis: Gehen Sie in Ihrer Argumentation (ohne Rechnung) auf die (Nicht-)Linearität des Poynting Vektors bezüglich der Felder und daraus resultierende Interferenzeffekte ein.

2 Elektromagnetische Welle im Medium (50 Pkt.)

In der Vorlesung haben wir gefunden, dass zeitharmonische Felder in homogenen Medien ebenso wie im Vakuum als Superposition ebener Wellen geschrieben werden können, es ist lediglich die Dispersionsrelation durch den Brechungsindex n zu korrigieren. Dieser Umstand beruht auf der Tatsache, dass ein elektromagnetisches Feld in einem homogenen Medium eine Polarisation erzeugt, die wiederum elektromagnetische Felder abstrahlt. In dieser Aufgabe leiten wir die Dispersionsrelation im Medium (exemplarisch im Fall $\mu = 1$) erneut her, indem wir explizit die Felder betrachten, die durch die zeitharmonische Polarisierung eines Mediums generiert werden. Bei dieser Gelegenheit üben wir zugleich den Umgang mit den elektromagnetischen Potentialen.
Wir beginnen mit den mikroskopischen Maxwell-Gleichungen, die lauten

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{\text{tot}}/\varepsilon_0, \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{8}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \tag{9}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j}_{\text{tot}}. \tag{10}$$

Ausserdem verwenden wir das skalare Potential ϕ und das Vektorpotential $\mathbf{A}$, aus denen sich die Felder berechnen lassen, wie in der Vorlesung behandelt.

(a) (6 Pkt.) Verwenden Sie die Lorenzeichung, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben, um die folgenden Wellengleichungen für die Potentiale herzuleiten

$$\nabla^2 \mathbf{A}_L - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_L}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{tot}}, \tag{11}$$

$$\nabla^2 \phi_L - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi_L}{\partial t^2} = -\rho_{\text{tot}}/\varepsilon_0. \tag{12}$$

(b) (5 Pkt.) Wir führen nun den elektrischen Hertz-Vektor $\boldsymbol{\pi}_e$ und den magnetischen Hertz-Vektor $\boldsymbol{\pi}_m$ ein, die wir über folgende Gleichungen definieren

$$\phi_L = -\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e, \tag{13}$$

$$\mathbf{A}_L = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{\pi}_e}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{\pi}_m. \tag{14}$$

Wir betrachten im Folgenden ein System ohne freie Ladungen (es existieren also lediglich Polarisationsladungen) und ohne freie Ströme und Leitungsströme (es existieren also lediglich Polarisationsströme und Magnetisierungsströme). Zeigen Sie, dass im betrachteten System die Hertz'schen Vektoren $\boldsymbol{\pi}_m$ und $\boldsymbol{\pi}_e$ die inhomogenen Wellengleichungen erfüllen

$$\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_e - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}_e}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P}, \tag{15}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_m - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{M}. \tag{16}$$

(c) (5 Pkt.) Zeigen Sie, dass sich die Felder aus den Hertz'schen Vektoren und den Quellen berechnen nach

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\pi}_e - \nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_m}{\partial t} - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}, \tag{17}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\pi}_m + \nabla \times \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_e}{\partial t}. \tag{18}$$

(d) (2 Pkt.) Wir können für zeitharmonische Felder zu komplexen Hertz'schen Vektoren übergehen, so dass gilt $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}$. Zeigen Sie, dass die komplexen Hertz'schen Vektoren die inhomogenen Helmholtzgleichungen erfüllen

$$\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_e + k_0^2 \boldsymbol{\pi}_e = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P}, \tag{19}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_m + k_0^2 \boldsymbol{\pi}_m = -\mu_0 \mathbf{M}, \tag{20}$$

mit der Wellenzahl im Vakuum k_0.

(e) (4 Pkt.) Für die zeitharmonischen Hertz'schen Vektoren gilt also die inhomogene Helmholtzgleichung mit der Vakuumwellenzahl k_0. Sie kennen die Green'sche Funktion $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ der Helmholtzgleichung aus der Vorlesung. Wir beschränken uns für den Rest dieser Aufgabe auf ein Medium, das keinerlei Magnetisierung zeigt, so dass wir im Folgenden lediglich den elektrischen Hertz'schen Vektor zu betrachten haben. Zeigen Sie, dass für den elektrischen Hertz'schen Vektor gilt

$$\boldsymbol{\pi}_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}V' \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathbf{P}(\mathbf{r}'). \tag{21}$$

(f) (8 Pkt.) Wir nehmen nun eine Polarisation in der Form einer in positive z-Richtung propagierenden ebenen Welle bei Frequenz ω an. Die räumliche Periodizität der Polarisation sei bestimmt durch ihre (bislang unbekannte) Wellenzahl k, so dass gilt $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$. Ausserdem sei die Polarisation transversal, so dass der Polarisationsvektor $\mathbf{P}_0$ senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung steht. Unser Ziel im Folgenden ist, die Wellenzahl k in Abhängigkeit von der Frequenz ω (bzw. der Vakuumwellenzahl k_0) zu bestimmen.
Verwenden Sie die Substitution $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$ um folgenden Ausdruck für den Hertz'schen Vektor herzuleiten

$$\boldsymbol{\pi}_e(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z'-z)} \int_{|z-z'|}^{\infty} \mathrm{d}R \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 R}. \tag{22}$$

(g) (2 Pkt.) Berechnen Sie das letzte Integral in Gl. (22), indem Sie folgenden Grenzwert betrachten

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{|z-z'|}^{\infty} \mathrm{d}R \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 R} \mathrm{e}^{-\lambda R}. \tag{23}$$

Hinweis: Diese Vorgehensweise ist mathematisch nicht völlig einwandfrei, führt aber in unserem Falle zuverlässig zum Ziel. Verwechseln Sie den hier eingeführten Parameter λ nicht mit der Wellenlänge!

(h) (10 Pkt.) Zeigen Sie, dass der elektrische Hertz'sche Vektor lautet

$$\boldsymbol{\pi}_e(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{\varepsilon_0(k^2 - k_0^2)}. \tag{24}$$

Hinweis: Spalten Sie das zu berechnende Integral geeignet auf, um den Betrag im Integranden loszuwerden. Wenden Sie weiterhin den Grenzwert aus Teilaufgabe (g) an.

(i) (4 Pkt.) Berechnen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aus dem Hertz'schen Vektor.
Hinweis: Zeigen Sie, dass der Hertz'sche Vektor $\boldsymbol{\pi}_e$ divergenzfrei ist und verwenden Sie diese Tatsache zusammen mit der inhomogenen Helmholtzgleichung, um Ihre Rechnung zu vereinfachen.

(j) (4 Pkt.) Nehmen Sie an, dass ein linearer Zusammenhang zwischen der Polarisation und dem elektrischen Feld besteht von der Form $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$. Zeigen Sie, dass damit für die Wellenzahl im Medium k gilt

$$k^2 = (1 + \chi) k_0^2. \tag{25}$$

Welcher Zusammenhang besteht folglich zwischen dem Brechungsindex n eines nicht magnetisierbaren Mediums und seiner Suszeptibilität χ?