Übung 6

Abgabe: 05.04. bzw. 09.04.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Energietransport durch elektromagnetische Felder

1 Die Skin-Eindringtiefe im guten Leiter (40 Pkt.)

Viele Probleme des Elektromagnetismus lassen sich analytisch lösen, indem man involvierte Materialien als perfekte Leiter modelliert. An einem idealen Leiter werden elektromagnetische Felder perfekt reflektiert und dringen nicht in den Leiter ein. In reale Materialien mit endlicher Leitfähigkeit können elektromagnetische Felder jedoch bis zur charakteristischen "Skin-Tiefe" eindringen. Dieser Umstand führt einerseits zu Ohm'schen Verlusten. Andererseits wird die Skin-Eindringtiefe relevant, wenn die betrachteten Strukturgrössen vergleichbar werden mit der Skin-Tiefe. Beispielsweise besitzt ein Metallfilm mit einer Dicke vergleichbar mit der Skin-Tiefe eine endliche Transparenz.

In dieser Aufgabe stellen wir einen Zusammenhang her zwischen der Skin-Tiefe, der Wellenlänge elektromagnetischer Strahlung und der frequenzabhängigen Leitfähigkeit eines Materials.

(a) (4 Pkt.) Verwenden Sie die konstituierenden Relationen

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}, \tag{1}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \tag{2}$$

mit der reellen Permittivität ε_r, um aus den Maxwell-Gleichungen zusammen mit der Definition der Leitfähigkeit $\mathbf{j}_{\mathrm{cond}} = \sigma \mathbf{E}$ die komplexe Permittivität

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \frac{\mathrm{i}\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \tag{3}$$

herzuleiten.

(b) (4 Pkt.) Verwenden Sie den Ansatz für eine ebene Welle im quellfreien Raum mit Brechungsindex n, um aus den Maxwell-Gleichungen die Dispersionsrelation herzuleiten

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{4}$$

(c) (4 Pkt.) Mit der Definition des Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ ergibt sich für komplexes ε ein komplexer Brechungsindex $n = n' + \mathrm{i}n''$. Zeigen Sie, dass der Imaginärteil des Brechungsindex für ein exponentielles Abfallen des Feldes einer ebenen Welle verantwortlich ist.

(d) (8 Pkt.) Zeigen Sie, dass für den Realteil n' und und den Imaginärteil n'' des komplexen Brechungsindex gilt

$$n' = \sqrt{A\left[\sqrt{1+B}+1\right]}, \tag{5}$$

$$n'' = \sqrt{A\left[\sqrt{1+B}-1\right]}, \tag{6}$$

wobei A und B von Ihnen zu bestimmen sind. Begründen Sie die Wahl Ihrer Vorzeichen.

(e) (4 Pkt.) Begründen Sie, warum im Falle guter Leiter gilt $n' \approx n''$. Berechnen Sie k_{z2} im guten Leiter und argumentieren Sie, warum die in den Leiter gebrochene Welle entlang dem Lot propagiert. Die Grenzfläche stehe hier senkrecht zur z-Achse.

(f) (8 Pkt.) Drücken Sie n' für einen guten Leiter aus durch die Vakuumwellenlänge λ bei Frequenz ω und die Skin-Eindringtiefe

$$\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu \sigma \omega}}. \tag{7}$$

Erstellen Sie einen Graphen der reellen elektrischen Feldamplitude einer in einen guten Leiter eindringenden ebenen Welle zum Zeitpunkt $t = 0$ für reelles $\mathbf{E}_0$ als Funktion der Eindringtiefe z normiert durch die Skin-Tiefe $\delta(\omega)$.

Hinweis: Ein geeigneter Wertebereich für die Abszisse ist $z/\delta(\omega) = 0 \ldots 2\pi$. Normieren Sie die Ordinate geeignet und beschriften Sie Ihre Achsen aussagekräftig und, sofern notwendig, mit Einheiten.

(g) (8 Pkt.) Zeigen Sie, dass für den Intensitätsreflexionskoeffizienten $R^{(i)} = \left|r^{(i)}\right|^2$ (mit $i \in \{\mathrm{s}, \mathrm{p}\}$) für normalen Einfall von einem Dielektrikum mit Permittivität $\varepsilon_1 = n_1^2$ und Permeabilität $\mu_1 = 1$ in ein Metall mit guter Leitfähikeit σ und reeller Permittivität ε_r, sowie Permeabilität $\mu = 1$, in erster Näherung die Hagen-Rubens-Relation gilt

$$R \approx 1 - 2\frac{n_1}{n'} = 1 - \sqrt{\frac{8\varepsilon_1\varepsilon_0\omega}{\sigma}}. \tag{8}$$

Machen Sie sich klar, warum gute Leiter einen metallischen Glanz besitzen.

2 Absorption in einem metallischen Leiter (35 Pkt.)

In der vorhergehenden Aufgabe haben wir festgestellt, dass eine elektromagnetische Welle in einem Leiter mit endlicher Leitfähigkeit exponentiell gedämpft wird. Die Dämpfung kommt durch die Absorption elektromagnetischer Energie durch die endliche Leitfähigkeit und die resultierenden Ohm'schen Verluste zustande. In dieser Aufgabe überzeugen wir uns, dass die ins Metall hineinpropagierende Energie komplett in Ohm'sche Verluste im Material umgesetzt wird und somit Energieerhaltung gilt.

Hierzu verifizieren wir das Poynting-Theorem für eine ebene Welle, die in einem guten metallischen Leiter in Richtung der z-Achse propagiert. Der Leiter sei charakterisiert durch μ (reell und positiv) und $\varepsilon = \varepsilon' + \mathrm{i}\sigma/(\omega\varepsilon_0)$, mit der Leitfähigkeit σ. Es dominiere der Imaginärteil der Permittivität, so dass gilt $\varepsilon \approx \mathrm{i}\sigma/(\omega\varepsilon_0)$. Die elektrische Feldamplitude bei $z = 0$ laute $\mathbf{E}_0$ und sei reell.
Hinweis: Verwenden Sie im Folgenden den Parameter $\beta = (1/c)\sqrt{\mu\sigma\omega/(2\varepsilon_0)}$, um Ihre Lösungen übersichtlich zu gestalten.

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie den $\mathbf{k}$-Vektor der ebenen Welle unter Verwendung des Parameters β.
Hinweis: Es gilt $\sqrt{\mathrm{i}} = (1 + \mathrm{i})/\sqrt{2}$.

(b) (2 Punkte) Formulieren Sie das reelle elektrische Feld $\mathbf{E}(z, t)$.

(c) (6 Punkte) Berechnen Sie das magnetische Feld $\mathbf{H}(z, t)$ und bestimmen Sie die Phasenverschiebung zwischen elektrischem und magnetischem Feld.

(d) (5 Punkte) Bestimmen Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor $\langle\mathbf{S}\rangle$ der betrachteten ebenen Welle.

(e) (3 Punkte) Berechnen Sie den Leistungsfluss $\mathbf{P}_S$ der ebenen Welle durch eine Fläche A, die bei $z = 0$ senkrecht zur z-Achse steht.

Wir haben soeben die Leistung berechnet, die mit der elektromagnetischen Welle ins Metall eindringt. Im Folgenden bestätigen wir das Poynting'sche Theorem, indem wir jene Leistung berechnen, die das Feld der ebenen Welle an den induzierten Polarisationsströmen verrichtet, was gerade der in Ohm'sche Verluste umgesetzten Energie entspricht.

(f) (5 Punkte) Drücken Sie das Polarisationsfeld $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ im metallischen Medium aus durch das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, die Leitfähigkeit σ, die Kreisfrequenz ω, sowie konstante Faktoren.

(g) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Polarisationsstromdichte lautet

$$\mathbf{j}_{\mathrm{p}}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\{[\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 + \sigma]\,\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz - \mathrm{i}\omega t}\}\ . \tag{9}$$

(h) (6 Punkte) Berechnen Sie die mittlere Leistung (pro Einheitsfläche A) P_{abs}, die in Joule'sche Wärme umgesetzt wird. Betrachten Sie hierzu die Leistung, die das Feld der ebenen Welle an der Polarisationsstromdichte vollbringt.
Hinweis: Der Leiter erstrecke sich über den gesamten Halbraum $z > 0$.

(i) (2 Punkte) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse für den Leistungsfluss des Poyntingvektors P_S ins Metall aus Teilaufgabe (e) sowie für die im Metall absorbierte Joule'sche Wärme P_{abs} aus Teilaufgabe (h). Ergeben Ihre Resultate Sinn? Begründen Sie Ihre Antwort.

3 Energietransport durch evaneszente Wellen (25 Pkt.)

Wir haben in der Vorlesung festgestellt, dass evanezente Wellen keine Energie in jener Richtung transportieren, in der sie exponentiell abfallen. Allerdings wissen wir, dass bei frustrierter Totalreflexion Energie über einen kleinen Spalt fliesst, in dem lediglich evaneszente Wellen existieren. In dieser Aufgabe lösen wir diesen scheinbaren Widerspruch auf, indem wir uns überzeugen, dass durch Interferenz gegenläufiger evaneszenter Wellen tatsächlich Energietransport stattfinden kann.

Eine in der xz-Ebene propagierende ebene Welle mit Kreisfrequenz ω falle aus der negativen z-Richtung kommend auf eine Grenzfläche bei $z = -z_0$ ein, an der sie total reflektiert wird. Im Raumbereich $z > -z_0$ befinde sich Vakuum und das Feld dort laute

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \;=\; \mathrm{H}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_z(z+z_0)}\, \mathbf{n}_y \;, \tag{10}$$

wobei H_0 reell sei. Der parallele Wellenvektor k_x sei durch einen effektiven Brechungsindex $n_{\text{eff}} > 1$ und die Wellenzahl im Vakuum $k = \omega/c$ wie folgt bestimmt

$$k_x \;=\; n_{\text{eff}}\, k \;. \tag{11}$$

(a) (3 Punkte) Drücken Sie k_z durch n_{eff} und k aus und argumentieren Sie, warum es sich im Bereich $z > -z_0$ um eine evaneszente Welle handelt.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ der evaneszenten Welle.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass sowohl das komplexe magnetische Feld $\mathbf{H}_1$ als auch das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}_1$ divergenzfrei sind.

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass sowohl das komplexe magnetische Feld $\mathbf{H}_1$ als auch das komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}_1$ die quellfreie Helmholzgleichung erfüllen.

(e) (4 Punkte) Bestimmen Sie den zeitgemittelten Poyntingvektor $\langle \mathbf{S} \rangle$ im Bereich $z > -z_0$.

(f) (1 Punkt) Berechnen Sie den Leistungsfluss durch eine Fläche A in der Ebene $z = 0$.

Die evaneszente Welle transportiert also keine Energie in z-Richtung. Dem bislang betrachteten evaneszenten Feld werde nun ein zweites evaneszentes Feld überlagert, das jedoch von der Ebene $z = +z_0$ in negative z-Richtung abfalle und weiterhin relativ zum ersten Feld um ϕ phasenverschoben sei. Das magnetische Feld dieser zweiten elektromagnetischen Welle laute im Raumbereich $z < z_0$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \;=\; \mathrm{H}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x - \mathrm{i}k_z(z-z_0)}\, \mathbf{n}_y \;, \tag{12}$$

wobei noch stets $k_x = n_{\text{eff}}\, k$ gelte.

(g) (4 Punkte) Bestimmen Sie das totale elektrische und magnetische Feld im Bereich $-z_0 < z < z_0$.
Hinweis: Ignorieren Sie mögliche Reflexionen an den Grenzflächen.

(h) (5 Punkte) Berechnen Sie die z-Komponente des zeitgemittelten Poyntingvektors $\langle S_z \rangle$ für das gesamte Feld.

(i) (1 Punkt) Für welche Phasenwinkel ϕ wird der Energiefluss in negativer z-Richtung maximal?