Übung 5

Abgabe: 29.03. bzw. 2.04.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Felder in Materie und an Grenzflächen

1 Felder und Wellen in Plasmas: Ionosphäre und Metalle (50 Pkt.)

Wir betrachten ein Medium, das aus freien Ladungen besteht (Plasma). Ein einfallendes Feld $\mathbf{E}$ mit Frequenz ω fällt auf dieses Medium ein. Die Wechselwirkung mit einer einzelnen Ladung q führt zur Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\gamma\dot{\mathbf{r}} \;=\; q\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\,, \tag{1}$$

wobei m die Masse des Ladungsträgers bezeichnet und γ ist die Streurate (an anderen Ladungsträgern oder am Gitter). Wäre die Ladung q gebunden, so käme noch ein rückstellender, elastischer Term $\omega_0^2\mathbf{r}$ zur rechten Seite hinzu. Das einfallende Feld ist monochromatisch, was uns erlaubt, das Feld und den Positionsvektor $\mathbf{r}$ wie folgt darzustellen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r})\exp\left[-i\omega t\right]\right\} \quad \mathbf{r}(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{r}\exp\left[-i\omega t\right]\right\}\,. \tag{2}$$

Dies führt zu folgender Bewegungsgleichung für die komplexen Amplituden $\mathbf{E}$ und $\mathbf{r}$

$$-\omega^2\mathbf{r} - i\omega\gamma\mathbf{r} \;=\; \frac{q}{m}\mathbf{E}(\mathbf{r})\,. \tag{3}$$

Wir multiplizieren nun mit q und führen das (komplexe) Dipolmoment $\mathbf{p} = q\mathbf{r}$ ein. Obige Gleichung lautet dann

$$-\omega^2\mathbf{p} - i\omega\gamma\mathbf{p} \;=\; \frac{q^2}{m}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{4}$$

und hat die Lösung

$$\mathbf{p} \;=\; -\frac{q^2/m}{\omega^2 + i\omega\gamma}\,\mathbf{E}(\mathbf{r})\,. \tag{5}$$

Die Polarisierung $\mathbf{P}$ am Ort $\mathbf{r}$ wird nun durch die Ladungsdichte N (Anzahl Ladungen pro Volumeneinheit, $[N] = m^{-3}$) bestimmt, das heisst,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \;=\; N(\mathbf{r})\,\mathbf{p}\,. \tag{6}$$

Wir nehmen an, dass die Ladungsdichte räumlich konstant ist und erhalten

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{q^2N/m}{\omega^2 + i\omega\gamma}\,\mathbf{E}(\mathbf{r})\,. \tag{7}$$

Da $\mathbf{P} = \varepsilon_0[\varepsilon(\omega) - 1]\mathbf{E}$ finden wir eine Formel für die Permittivität eines Plasmas

$$\varepsilon(\omega) \;=\; 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \tag{8}$$

wobei $\omega_p = \sqrt{Nq^2/(m\varepsilon_0)}$ die Plasmafrequenz bezeichnet.

1. (5 Punkte) Betrachten Sie Frequenzen $\omega \to 0$ und bestimmen Sie die dc Leitfähigkeit σ im Plasma.

2. (5 Punkte) Betrachten Sie eine ebene Welle, die sich in z Richtung ausbreitet und bei $z = 0$ in ein Plasma eindringt. Die Streurate sei viel kleiner als die Plasmafrequenz ($\gamma \ll \omega_p$). Diskutieren Sie die Propagation für $\omega \gg \omega_p$ und für $\omega \ll \gamma$.

3. (2 Punkte) Was passiert bei $\omega = \omega_p$? Hinweis: $\gamma \approx 0$ setzen und $\nabla \cdot \mathbf{D}$ betrachten.

Wir betrachten nun die Kommunikation zwischen einem Satelliten und einer Antenne, die auf der Erdoberfläche stationiert ist. Damit elektromagnetische Wellen von Antenne zum Satellit gelangen, müssen diese die Ionosphäre durchdringen können. Die Ionosphäre besteht aus zwei Schichten, der E Schicht und der F Schicht. Wir betrachten hier nur die untere E Schicht, die etwa 100 km über der Erdoberfläche beginnt und etwa 50 km dick ist. Die Elektronenladungsdichte ist $N_e = 3 \cdot 10^{11}\, m^{-3}$ und die Elektron-Elektron Kollisionsrate is $\gamma = 50$ kHz.

4. (1 Punkt) Bestimmen Sie die Plasmafrequenz $\omega_p/2\pi$ der Ionosphäre.

5. (2 Punkte) Ist es vorteilhaft GHz oder kHz Frequenzen zu wählen, um mit dem Satelliten zu kommunizieren?

6. (2 Punkte) Welche Frequenzen wählen Sie um von einer Antenne in der Schweiz zu einer Antenne in Australien zu funken?

7. (3 Punkte) Wie stark wird das Feld einer $\omega/2\pi = 1$ MHz Welle durch die E Schicht abgeschwächt? Hinweis: Vernachlässigen Sie Reflexionen.

Die elektromagnetischen Eigenschaften eines Metalls können durch ein freies Elektronengas beschrieben werden und so ist ein Metall ebenfalls ein Plasma. Die Elektronendichte ist jedoch viel höher als in der Ionosphäre. Für die meisten Metalle ist die Plasmafrequenz im ultravioletten Bereich. Für Frequenzen im sichtbaren Bereich gilt $\gamma \ll \omega \ll \omega_p$ und die Permittivität wird $\varepsilon(\omega) \approx 1 - \omega_p^2/\omega^2$, das heisst, ε ist reell und negativ. Dies ermöglicht, dass sich an den Oberflächen von Metallen Oberfächenwellen ausbreiten können.

Um die Eigenschaften dieser Oberfächenwellen zu berechnen, betrachten wir die Grenzfläche ($z = 0$) zwischen einem nicht-dispersiven Dielektrikum mit Permittivität $\varepsilon_1 > 0$ und einem Metall mit dispersiver Permittivität $\varepsilon_2(\omega)$. Die Grenzfläche sei bei $z = 0$, das Dielektrikum im Halbraum $z > 0$, und das Metall im Halbraum $z < 0$. Wir suchen Lösungen der Maxwell Gleichungen von folgender Form

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) \;=\; \mathrm{Re}\left\{[E_{i_x}\mathbf{n}_x + E_{i_z}\mathbf{n}_z]\; \mathrm{e}^{i[k_{i_x}x + k_{i_z}z - \omega t]}\right\} \qquad i \in [1, 2]\,, \tag{9}$$

wobei $\mathbf{E}_1$ das Feld im Dielektrikum und $\mathbf{E}_2$ das Feld im Metall ist. $\mathbf{n}_x$ und $\mathbf{n}_z$ sind die Einheitsvektoren in Richtung x und z. Damit sich die Welle entlang der Grenzfläche ausbreitet, muss das Feld entlang beider z Richtungen exponentiell abfallen. Sonst würde die Welle ihre Energie ins Dielektrikum oder ins Metall abstrahlen.

8. (4 Punkte) Verwenden Sie das Gauss'sche Gesetz um eine Beziehung zwischen E_{i_x} und E_{i_z} in den beiden Materialien herzuleiten.

9. (3 Punkte) An der Grenzfläche muss $\mathbf{n}_z \times \mathbf{E}$ stetig sein. Zeigen Sie, dass dies $E_{1_x} = E_{2_x}$ und $k_{1_x} = k_{2_x}$ bedingt.

10. (4 Punkte) An der Grenzfäche muss auch $\mathbf{n}_z \cdot \mathbf{D}$ stetig sein. Leiten Sie daraus, und mit Hilfe der vorigen Bedingungen, die Dispersionsrelation $k_x(\omega, \varepsilon_i)$ für die Propagation entlang der Oberfläche her.

11. (4 Punkte) Leiten Sie das magnetische Feld $\mathbf{H}$ her und zeigen Sie, dass die entsprechenden Grenzbedingungen erfüllt sind.

12. (5 Punkte) Wir suchen Lösungen, die exponentiell von der Grenzfläche abfallen und sich nur entlang der Oberfläche ausbreiten. Die Felder müssen also im Limit $z \to \pm\infty$ verschwinden. Leiten Sie eine Bedingung für ε_2 her, sodass diese Bedingung erfüllt ist.

Eine elektromagnetische Oberflächenwelle bedingt eine Ladungsmodulation, welche entlang der Grenzfläche propagiert. Die Oberflächenladungsdichte lässt sich mit Hilfe der Felder und den unterschiedlichen ε_i an der Grenzfläche berechnen ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$). Da eine elektromagnetische Oberflächenwelle immer mit einer entsprechenden Oberflächenladungswelle im Material verknüpft ist, spricht man von einem *Oberflächen-Polariton*. Wenn die Ladungen frei sind, spricht man von einem Phonon-Polariton, wenn sie gebunden sind, dann von einem Phonon-Polariton.

13. (5 Punkte) Benutzen Sie die Integralform von $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ um die Oberflächenladungsdichte $\sigma(x,t)$ an der Grenzfläche zu berechnen. Hinweis: Drücken Sie σ als Funktion von E_x aus.

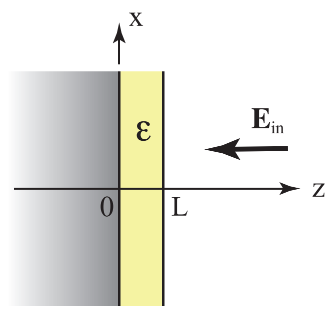
Die dielektrische Permittivität des Dielektrikums (ε_1) kann als konstant angenommen werden, während die des Metalles durch die Plasmarelation (8) gegeben ist. Für $\omega \gg \gamma$ lautet diese

$$\varepsilon_2(\omega) \ = \ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ . \tag{10}$$

14. (5 Punkte) Plotten Sie die Dispersionsrelation $\omega(k_x)$ and vergleichen Sie diese mit der Dispersionsrelation im Dielektrikum $\omega(k) = \sqrt{\varepsilon_1} k/c$. Diskutieren Sie den Fall $\omega \to \omega_p/\sqrt{1+\varepsilon_1}$. Was ist die Wellenlänge der Oberflächenwelle in diesem Fall? Hinweise: Es ist einfacher $k_x(\omega)$ darzustellen als $\omega(k_x)$. Verwenden Sie die skalierten Grössen $\tilde{\omega} = \omega/\omega_p$ und $\tilde{k}_x = (c/\omega_p)k_x$. Für's plotten können Sie $\varepsilon_1 = 1$ annehmen.

2 Reflexion an einem Dielektrischen Film (30 Pkt.)

Wir betrachten die elektromagnetischen Felder in einem dielektrischen Film mit Dicke L, Permittivität $\varepsilon > 0$ sowie Permeabilität $\mu = 1$, der auf ein perfekt reflektierendes Material aufgebracht ist, das den gesamten Halbraum $z < 0$ füllt. Im Bereich $z > L$ herrscht ein Vakuum.



Eine senkrecht einfallende ebene Welle

$$\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) \;=\; \mathrm{E}_0 \, \cos(-k_0 z - \omega t)\, \mathbf{n}_x$$

trifft auf den dielektrischen Film auf, wobei $\mathbf{n}_x$ der Einheitsvektor in x Richtung ist, sowie E_0 eine reelle Amplitude.

1. (2 Punkte) Schreiben Sie das einfallende Feld $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ in komplexer Schreibweise und definieren Sie die komplexe Amplitude $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r})$.

2. (5 Punkte) Formulieren Sie die komplexen elektrischen Felder im Dielektrikum $\mathbf{E}_{\text{diel}}(\mathbf{r})$ sowie im Vakuum $\mathbf{E}_{\text{vac}}(\mathbf{r})$ jeweils als Summe zweier gegenläufiger Teilfelder. Wie berechnet sich die Wellenzahl im Dielektrikum k_d aus jener im Vakuum k_0?

3. (3 Punkte) Bestimmen Sie die zugehörigen komplexen magnetischen Felder im Vakuum $\mathbf{H}_{\text{vac}}(\mathbf{r})$ sowie im Dielektrikum $\mathbf{H}_{\text{diel}}(\mathbf{r})$ als Funktion der in Teilaufgabe 2 verwendeten elektrischen Teilfelder.

4. (6 Punkte) Formulieren Sie die Randbedingungen an den beiden Grenzflächen, und bestimmen Sie mit ihrer Hilfe das reflektierte Feld $\mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, t)$ im Bereich $z > L$.

5. (5 Punkte) Berechnen Sie die Intensität der reflektierten Welle im Vakuum als Funktion der Filmdicke L. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit der Intensität der einfallenden Welle und diskutieren Sie Ihr Ergebnis unter dem Gesichtspunkt der Energieerhaltung.

6. (6 Punkte) Berechnen Sie die elektrische Energiedichte $w_e = (1/4)\varepsilon_0\varepsilon|\mathbf{E}_{\text{diel}}(\mathbf{r})|^2$, die magnetische Energiedichte $w_m = (1/4)\mu_0\mu|\mathbf{H}_{\text{diel}}(\mathbf{r})|^2$, und die gesamte Energiedichte $w_e + w_m$

im Dielektrikum als Funktion vom Ort z und der Feldamplitude im Dielektrikum E_{diel}. Unter Verwendung der Randbedingungen, bestimmen Sie die Feldamplitude E_{diel} als Funktion der einfallenden Amplitude E_0 und der Filmdicke L.

7. (3 Punkte) Bestimmen Sie die Filmdicken L als Funktion der Vakuumwellenlänge λ_0, für welche die Energiedichte im Film maximal wird.