

Übung 4

Abgabe: 22.03. bzw. 26.03.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Pulse und Interferenz

In dieser Übung betrachten wir nach einer kleinen mathematischen Vorbereitung die zeitliche Form eines Pulses mit rechteckförmigem Frequenzspektrum. Die letzte Aufgabe befasst sich mit einem Gerät zur Messung von Rotationsgeschwindigkeiten. Versuchen Sie, Ihre Gedankengänge knapp aber nachvollziehbar zu kommentieren. Achten Sie bei Graphen auf eine aussagekräftige Achsenbeschriftung inklusive korrekter Einheiten.

1 Mathematische Vorarbeit (10 Pkt.)

Die Rechtecksfunktion sei definiert als

$$\text{rect}(x, x_0, \Delta) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_0 - \Delta < x < x_0 + \Delta, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (1)$$

und die sinc-Funktion als

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \quad (2)$$

Verwenden Sie die Fouriertransformation um zu zeigen, dass gilt

$$\text{rect}(\omega, \omega_0, \Delta) = \frac{\Delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega - \omega_0)t} \text{sinc}(\Delta t). \quad (3)$$

2 Frequenzspektrum eines Pulses (50 Pkt.)

Die hohen Datenübertragungsraten des Internets sind durch optische Kommunikationsverfahren möglich geworden, die auf der Encodierung von Information auf in Glasfasern propagierende Lichtpulse beruhen. Hohe Taktraten benötigen zwingend entsprechend kurze Pulse, die wiederum auf Lichtquellen mit passenden Frequenzspektren basieren. In dieser Aufgabe befassen wir uns mit dem Frequenzspektrum eines solchen Pulses.

Wir betrachten einen y -polarisierten optischen Puls im Vakuum, der sich in positive x -Richtung ausbreitet und dessen y -Komponente des elektrischen Feldes am Ort $x = 0$ als Funktion der Zeit lautet

$$E(x = 0, t) = E_0 \operatorname{sinc}[\alpha ct] \cos(\omega_0 t - \phi). \quad (4)$$

- (a) (9 Pkt.) Erstellen Sie jeweils einen Graphen des zeitabhängigen Feldes am Ort $x = 0$ für den Fall $\phi = 0$ sowie $\phi = \pi/2$. Zeichnen Sie die Einhüllende separat in Ihre Graphen ein. Beschreiben Sie in Worten, warum ϕ die *carrier-envelope* Phase genannt wird. Argumentieren Sie, warum die *carrier-envelope* Phase insbesondere bei sehr kurzen Pulsen bedeutsam ist. *Hinweis:* Tragen Sie die dimensionslose Grösse $E(x = 0, t)/E_0$ auf der Ordinate gegen die dimensionslose Grösse $\omega_0 t$ auf der Abszisse auf. Geeignete Parameter für Ihren Graphen sind beispielsweise $\omega_0 t = -50 \dots 50$ und $\alpha c/\omega_0 = 0.2$.
- (b) (7 Pkt.) Wie lautet das zeit- und ortsabhängige reelle Feld $E(x, t)$ des Pulses?
Hinweis: Verwenden Sie das Prinzip von d'Alembert.
- (c) (optional) Überprüfen Sie durch explizite Rechnung, ob Ihr Feld aus der vorherigen Teilaufgabe die Wellengleichung erfüllt.
- (d) (12 Pkt.) Berechnen Sie das Frequenzspektrum des Pulses $\hat{E}(x, \omega)$.
- (e) (7 Pkt.) Beweisen Sie, dass jedes Frequenzspektrum, das der Bedingung

$$\hat{E}(x, \omega) = \hat{E}^*(x, -\omega) \quad (5)$$

genügt, ein reelles zeitabhängiges Feld $E(x, t)$ zur Folge hat.

- (f) (8 Pkt.) Überprüfen Sie, dass Ihr Spektrum aus Teilaufgabe (d) die Bedingung in Gl. (5) erfüllt.
- (g) (4 Pkt.) Skizzieren Sie das Frequenzspektrum $\hat{E}(x = 0, \omega)$ am Ort $x = 0$ für $\phi = 0$.
- (h) (3 Pkt.) Wie ist der Zusammenhang zwischen der zeitlichen Länge eines Pulses und seinem Frequenzspektrum? Sind kürzere Pulse spektral breiter oder schmaler?

3 Sagnac Interferometer (40 Pkt.)

In einem Sagnac Interferometer wird ein Lichtstrahl an einem Strahlteiler aufgespalten, so dass zwei Strahlen in gegenläufiger Richtung in einem Ring umlaufen, um wieder auf den Strahlteiler zu treffen, hinter dessen einem Ausgang ein Detektor steht [s. Abb. 1(a)].

Wir wenden uns zunächst dem Strahlteiler zu, von dem wir annehmen, dass es sich um ein symmetrisches Element handelt, so dass Reflexions- und Transmissionskoeffizienten nicht von der Einfallsseite abhängen. Wir beschreiben den Strahlteiler mit den komplexen Koeffizienten τ und ρ . Die komplexe Amplitude eines einfallenden Feldes E_{in} sei nach Transmission also $E_t = \tau E_{\text{in}}$. Entsprechendes gelte für die Reflexion $E_r = \rho E_{\text{in}}$.

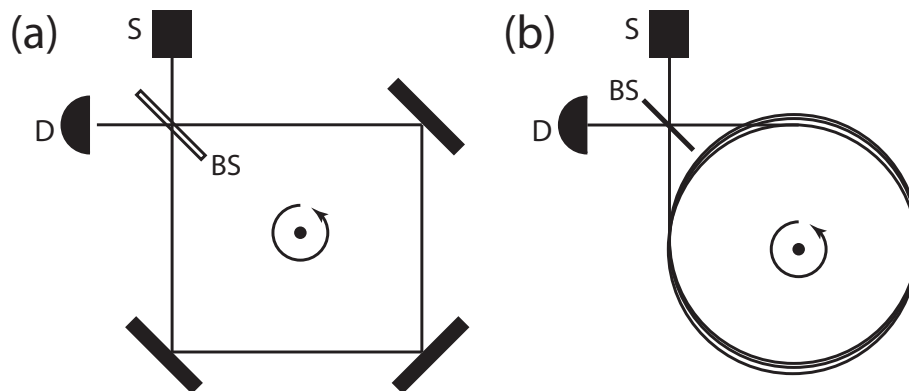


Abbildung 1: (a) Rechteckiges Sagnac Interferometer mit Strahlteiler (BS), Lichtquelle (S) und Detektor (D). (b) Faserbasiertes Sagnac Interferometer.

- (4 Pkt.) Wir gehen davon aus, dass sich in unserem Interferometer ein 50/50-Strahlteiler befindet, der die einfallende Intensität verlustfrei zu jeweils 50% auf die beiden ausfallenden Arme verteilt. Was bedeutet dieser Umstand für ρ und τ ?
- (5 Pkt.) Machen Sie sich klar, wo sich die beiden Ausgänge (output ports) des Interferometers befinden. Geben Sie Ausdrücke für die komplexen Felder in diesen beiden Ausgängen als Funktion des einfallenden Feldes E_{in} und der Koeffizienten ρ und τ an.
- (5 Pkt.) Berechnen Sie die Intensität im Ausgang, der nicht zum Detektor führt.
- (7 Pkt.) Betrachten Sie nun die Intensität in jenem Ausgang, der zum Detektor führt, und zeigen Sie, dass die Differenz der Phasensprünge bei Reflexion und Transmission am Strahlteiler gerade $\pm\pi/2$ betragen muss.

Sagnac Interferometer werden als Gyroskope zur Präzisionsmessung von Drehgeschwindigkeiten eingesetzt. Wir betrachten hier ein Sagnac Interferometer, das sich um seine Mittelachse mit der Winkelgeschwindigkeit Ω dreht.

- (6 Pkt.) Zeigen Sie für das Sagnac Interferometer (unter der Annahme, dass sämtliche mechanischen Komponenten sich mit Geschwindigkeiten viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit

c bewegen), dass die zusätzliche Phase, die ein Lichtfeld pro Umlauf in Rotationsrichtung aufnimmt, gerade

$$\Delta\phi = \frac{4\pi A\Omega}{c_0\lambda_0} \quad (6)$$

beträgt, wobei λ_0 die Vakuumwellenlänge, A die vom Interferometer eingeschlossene Fläche und c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit seien. Nehmen Sie an, das Feld propagiere in Vakuum. Wie lautet die Phasenverschiebung für ein Lichtfeld, das gegen die Rotationsrichtung umläuft? *Hinweis:* Berechnen Sie den Weglängenunterschied, der sich pro Umlauf durch die Rotation des Aufbaus ergibt. Es lässt sich allgemein zeigen, dass Gl. (6) für den Phasenunterschied unabhängig von der Form der Fläche A gilt. Wählen Sie eine geeignete Form, um Ihre Betrachtung zu vereinfachen.

- (f) (5 Pkt.) Berechnen Sie die Intensität am Detektor als Funktion der Phasenverschiebung $\Delta\phi$.
- (g) (5 Pkt.) Für praktische Anwendungen verwendet man in der Regel faserbasierte Sagnac Interferometer [s. Abb. 1(b)]. Durch Aufwickeln einer langen Faser kann so in einem kompakten Volumen eine grosse effektive Fläche realisiert werden. Berechnen Sie die Intensität auf dem Detektor eines Sagnac Interferometers mit einer Faserlänge von 10 km auf einer Spule mit Durchmesser 30 cm, das sich auf einem Satelliten befindet, der sich in 24 h genau einmal um die eigene Achse dreht. Der Laser des Interferometers habe eine Leistung von 100 mW und operiere bei der Vakuumwellenlänge 1550 nm. *Hinweis:* Relativistische Betrachtungen zeigen, dass Gl. (6) unabhängig vom Brechungsindex des Mediums gilt, in dem das Feld propagiert. Der Brechungsindex der Faser ist somit irrelevant.
- (h) (3 Pkt.) Nennen Sie Vor- und Nachteile des beschriebenen Sagnac Gyrometers bezüglich der Kalibration und der Linearität. Wie könnten Sie das Sagnac-Interferometer in einen linearen Rotationssensor verändern und welche potentiellen Schwierigkeiten ergeben sich daraus?