Übung 3

Abgabe: 15.03. bzw. 19.03.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Die Wellengleichung

1 Polarisationszustände und Intensität ebener Wellen (60 Pkt.)

In der Vorlesung haben Sie ebene Wellen als Lösungen der quellfreien Wellengleichung kennengelernt. In dieser Aufgabe machen wir uns mit verschiedenen Polarisationszuständen ebener Wellen vertraut und veranschaulichen uns die Feldverteilungen in stehenden Wellen. Nutzen Sie insbesondere den wiederholten Wechsel zwischen reellen und komplexen Feldern, um sich einerseits mit der Rolle der komplexen Phase vertraut zu machen und die Vorteile der komplexen Notation zu begreifen. Zusätzlich sind auf der Vorlesungshomepage Visualisierungen dreier Feldverteilungen verfügbar. Ordnen Sie die Visualisierungen den Teilaufgaben zu.

Wir betrachten hier zunächst eine monochromatische, zirkular polarisierte ebene Welle, die wir als Superposition zweier linear polarisierter Wellen schreiben. Bei zirkular polarisierten Feldern beschreibt der elektrische Feldvektor an jedem Raumpunkt in der Zeit einen Kreis. Wir wählen hier die Konvention, dass wir Felder linkszirkular nennen, deren Feldvektor an einem fixen Raumpunkt in Blickrichtung *zur* Quelle im Gegenuhrzeigersinn rotiert. Die folgende Aufgabe finde im Vakuum statt.

(a) (6 Pkt.) Formulieren Sie das reelle elektrische Feld einer in positive x-Richtung propagierenden, rechtszirkular polarisierten monochromatischen ebenen Welle. Zum Zeitpunkt $t = 0$ laute das reelle elektrische Feld in der Ebene $x = 0$ gerade $\mathbf{E} = E_0\mathbf{n}_y$. Erstellen Sie eine aussagekräftige Skizze der Trajektorie des elektrischen Feldvektors und seiner Umlaufrichtung an einem beliebigen Raumpunkt.

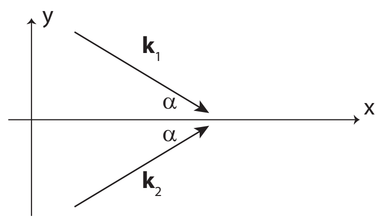
(b) (3 Pkt.) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass Ihr Feld aus Teilaufgabe (a) die Wellengleichung erfüllt.

(c) (3 Pkt.) Bestimmen Sie das zu Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe (a) gehörende komplexe elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

(d) (4 Pkt.) Ermitteln Sie das zu Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe (a) gehörende komplexe magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. In welchem Polarisationszustand befindet sich das Magnetfeld? Welche Phasendifferenz haben das elektrische und das magnetische Feld?

(e) (2 Pkt.) Zeigen Sie, dass Ihr soeben ermitteltes Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ und Ihr elektrisches Feld aus Aufgabe (c) transversal sind.

(f) (8 Pkt.) Wir betrachten nun zwei rechtszirkular polarisierte ebene Wellen identischer Amplitude E_0 und Frequenz ω, die in der xy-Ebene unter dem Winkel α sowie $-\alpha$ zur x-Achse propagieren, wie in der folgenden Abbildung skizziert. Formulieren Sie das komplexe Feld $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ so, dass das Feld der ersten Welle im Ursprung zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet $\mathbf{E}_1(\mathbf{r} = 0, t = 0) = E_0\mathbf{n}_z$. Formulieren Sie das komplexe Feld der zweiten Welle $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$, wobei diese einen Phasenversatz ϕ zur ersten Welle aufweise.



(g) (6 Pkt.) Berechnen Sie nun die Intensität $I(\mathbf{r})$ der beiden ebenen Wellen in Abhängigkeit des Winkels α und des Phasenunterschiedes ϕ.

(h) (6 Pkt.) Berechnen Sie die Intensitätsverteilung entlang der y-Achse im Falle $\alpha = \pi/4$. Fertigen Sie einen Graphen dieser Intensitätsverteilung an für $\phi = 0$. Normieren Sie auf der Abszisse den Ort y mit der Wellenlänge λ und auf der Ordinate die Intensität durch $2E_0^2/Z_0$. Was geschieht mit der Intensitätsverteilung, wenn Sie die Phase ϕ ändern?

(i) (2 Pkt.) Berechnen Sie die Intensitätsverteilung entlang der y-Achse im Falle $\alpha = \pi/2$. Was geschieht mit der Intensitätsverteilung, wenn Sie die Phase ϕ ändern?

(j) (4 Pkt.) Wir verweilen noch einen Augenblick beim Falle gegenläufiger ebener Wellen ($\alpha = \pi/2$) mit gleicher Zirkularität. Zeigen Sie, dass in diesem Falle das gesamte elektrische Feld lokal linear polarisiert ist, wobei sich die Polarisationsrichtung jedoch als Funktion von y um die y-Achse dreht. Bestimmen Sie einen Ausdruck für den Winkel $\gamma(y)$, den der elektrische Feldvektor mit der z-Achse einschliesst.

(k) (3 Pkt.) Formulieren Sie die Feldverteilung im Falle zweier gegenläufiger Wellen unterschiedlicher Händigkeit und gleicher Amplitude.

(l) (3 Pkt.) Zeigen Sie, dass das Gesamtfeld im Falle zweier gegenläufiger Wellen unterschiedlicher Händigkeit und gleicher Amplitude lokal zirkular polarisiert ist, indem Sie das reelle elektrische Feld betrachten.

(m) (3 Pkt.) Berechnen Sie die Intensität zweier gegenläufiger Wellen unterschiedlicher Händigkeit und gleicher Amplitude um zu zeigen, dass diese eine stehende Welle bilden. Geben Sie die Periodizität der Intensitätsverteilung der stehenden Welle als Funktion der Wellenlänge λ an.

(n) (7 Pkt.) So wie zirkulare Polarisation durch Superposition linear polarisierter Felder mit geeignetem Phasenversatz generiert werden kann, lässt sich lineare Polarisation durch Superposition zirkular polarisierter Felder erzeugen. Formulieren Sie das gesamte komplexe elektrische Feld zweier in x-Richtung propagierender Wellen mit identischer Amplitude und relativem Phasenversatz ϕ. In der Ebene $x = 0$ und zur Zeit $t = 0$ laute das Feld der ersten

Welle $E_0\mathbf{n}_z$. Eine der Wellen sei linkszirkular polarisiert, die andere rechtszirkular. Zeigen Sie, dass das Gesamtfeld linear polarisiert ist und der Polarisationswinkel relativ zur z-Achse lautet $\gamma = \phi/2$.

2 Elektromagnetische Wellen in sphärischen Koordinaten (40 Pkt.)

Aus der Vorlesung ist Ihnen bekannt, dass das (komplexe) räumliche elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ die Helmholtzgleichung $(\nabla^2 + \beta^2)\mathbf{E} = 0$ zu erfüllen hat, wobei ∇^2 der Laplace Operator ist und β die Wellenzahl. In kartesischen Koordinaten ergeben sich ebene Wellen als Lösungen der Helmholtzgleichung. In dieser Aufgabe suchen wir nach den Lösungen der Helmholtzgleichung in sphärischen Koordinaten. Einerseits üben wir so nochmals den Umgang mit einem nicht-kartesischen Koordinatensystem, andererseits stärken wir unsere Vertrautheit mit der Wellengleichung, indem uns zum Beispiel die Dispersionsrelation in zylidrischen Koordinaten begegnet. Aufgrund der Schwierigkeit, die sich durch die Vektornatur der Felder ergibt, beschränken wir uns im Folgenden auf die Lösung der Helmholtzgleichung $(\nabla^2 + \beta^2)\psi = 0$ für ein skalares Feld $\psi(r, \theta, \phi)$.

(a) (10 Pkt.) Verwenden Sie einen Separationsansatz, indem Sie $\psi(r, \theta, \phi)$ als Produkt dreier Funktionen $f(r)$, $g(\theta)$ und $h(\phi)$ schreiben. Wenden Sie sodann den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten auf $\psi(r, \theta, \phi)$ an um zu zeigen, dass die Funktion h folgende Gleichung erfüllt, wobei m eine Konstante ist

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\phi^2} + m^2 h = 0. \tag{1}$$

(b) (4 Pkt.) Überzeugen Sie sich, dass die Funktion g die folgende Gleichung erfüllt, wobei n eine Konstante ist

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left\{\sin\theta\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\theta}\right\} + \left[n(n+1) - \left\{\frac{m}{\sin\theta}\right\}^2\right] g = 0. \tag{2}$$

(c) (4 Pkt.) Beweisen Sie, dass die Funktion f die folgende Gleichung erfüllt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right\} + \left[(\beta r)^2 - n(n+1)\right] f = 0. \tag{3}$$

(d) (5 Pkt.) Formulieren Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung Gl. (1) für h einmal unter Gebrauch trigonometrischer Basisfunktionen und einmal unter Gebrauch komplexer Exponentialfunktionen.

(e) (3 Pkt.) Argumentieren Sie, warum im Elektromagnetismus typischerweise $m \in \mathbb{N}$ gilt.

(f) (5 Pkt.) Wir erinnern uns, dass $\psi(\mathbf{r})$ und somit auch h komplexe Felder sind. Formulieren Sie das zeitabhängige reelle Feld $h(\phi, t)$. Machen Sie sich anschaulich klar, welcher Typ von Wellen in der Zeit durch die komplexen Basisfunktionen jeweils dargestellt wird. Veranschaulichen Sie sich hierzu die Ausbreitung des reellen Feldes $h(\phi, t)$ als Funktion der Zeit. Welche Rolle spielt die "Quantenzahl" m?

(g) (4 Pkt.) Wir wenden uns im Folgenden dem Radialteil $f(r)$ unserer Lösung zu. Bringen Sie Ihre Differentialgleichung für f in die Form der modifizierten Bessel'schen Differentialgleichung

$$a^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}a^2} + 2a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a} + (a^2 + \gamma^2)f = 0. \tag{4}$$

Die Lösungen der Bessel'schen Differentialgleichung sind bekannt und so ergeben sich als allgemeine Lösungen der Gl. (3)

$$f(r) = Ah_n^{(1)}(\beta r) + Bh_n^{(2)}(\beta r), \qquad A, B \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

wobei $h_n^{(1)}(\beta r)$ die sphärischen Hankelfunktionen der ersten und $h_n^{(2)}(\beta r)$ jene der zweiten Art sind. Die sphärischen Hankelfunktionen lassen sich nicht in einem einfachen Ausdruck formulieren, ihre genaue Gestalt ist für uns an dieser Stelle jedoch nicht relevant. Für grosse Argumente lassen sich asymptotische Ausdrücke angeben, die lauten

$$\lim_{x\to\infty} h_n^{(1)}(x) = (-\mathrm{i})^{(n+1)} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x} \tag{6}$$

$$\lim_{x\to\infty} h_n^{(2)}(x) = \mathrm{i}^{(n+1)} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x}. \tag{7}$$

(h) (5 Pkt.) Zeigen Sie durch Betrachtung des korrespondierenden reellen Feldes, dass die Lösungen $h^{(1)}(x)$ und $h^{(2)}(x)$ in der Zeit propagierende Kugelwellen darstellen und bestimmen Sie die Propagationsrichtung.