Übung 2

Abgabe: 08.03. bzw. 12.03.2019

Elektromagnetische Felder & Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Induktion, Polarisierung und Magnetisierung

In dieser Übung machen wir uns vertraut mit der Polarisierung als Antwort der Materie auf elektrische Felder und der Magnetisierung als Reaktion auf magnetische Felder. Nach einigen mathematischen Vorarbeiten betrachten wir eine Messmethode zur experimentellen Bestimmung der Permeabilität. Schliesslich widmen wir uns dem Beispiel eines Plattenkondesators, anhand dessen wir die Vervollständigung der Maxwell'schen Gleichungen durch den Verschiebungsstrom nachvollziehen können.

1 Mathematische Vorarbeiten (10 Pkt.)

(a) (2 Pkt.) Zeigen Sie, dass gilt $\nabla' \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{R}}{R^3}$ für $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, wobei ∇' den Gradienten bezüglich der gestrichenen Koordinaten bezeichnet.

(b) (2 Pkt.) Beweisen Sie die Identität

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f). \tag{1}$$

(c) (2 Pkt.) Zeigen Sie die Identität

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}). \tag{2}$$

(d) (2 Pkt.) Beweisen Sie die Identität

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \tag{3}$$

(e) (2 Pkt.) Überzeugen Sie sich, dass gilt

$$\int \mathrm{d}V (\nabla \times \mathbf{a}) = -\oint_{\partial V} \mathbf{a} \times \mathrm{d}\mathbf{A}. \tag{4}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Gauss für ein Vektorfeld $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ sowie Gl. (2).

2 Magnetische Polarisierbarkeit und Messung der Permeabilität (60 Pkt.)

In dieser Aufgabe widmen wir uns einer magnetisierbaren Kugel in einem externen magnetischen Feld. Wir betrachten zunächst das Magnetfeld innerhalb einer homogen magnetisierten Kugel, um daraus auf den Fall einer magnetisierbaren Kugel in einem von aussen angelegten Magnetfeld zu schliessen. Abschliessend entwickeln wir eine Methode, mit der die Permeabilitätskonstante μ eines Mediums gemessen werden kann.

Wir betrachten zunächst einen beliebig geformten Körper endlicher Ausdehnung mit beliebiger Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r})$.

(a) (2 Pkt.) Verwenden Sie das Vektorpotential des magnetischen Punktdipols aus der letzten Übung um zu zeigen, dass das Vektorpotential des magnetisierten Körpers lautet

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3}\mathrm{d}V', \quad \mathrm{mit}\ \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \tag{5}$$

(b) (12 Pkt.) Zeigen Sie, dass das Vektorpotential Gl. (5) geschrieben werden kann als

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}_b(\mathbf{r}')}{R}\mathrm{d}V' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\partial V} \frac{\mathbf{K}_b(\mathbf{r}')}{R}\mathrm{d}A' \tag{6}$$

mit $\mathbf{J}_b(\mathbf{r'}) = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r'})$ und $\mathbf{K}_b(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}$, wobei $\mathbf{n}$ den Oberflächennormalenvektor bei $\mathbf{r}'$ bezeichnet. Offensichtlich ist also das Vektorpotential und somit auch das magnetische Feld eines magnetisierten Körpers jenes eines Körpers mit einer Stromdichte $\mathbf{J}_b$ im Inneren sowie einer Flächenstromdichte $\mathbf{K}_b$ auf der Oberfläche des Körpers.

(c) (7 Pkt.) Zeigen Sie nun, dass das Magnetfeld $\mathbf{B}$ im Inneren einer homogen magnetisierten Kugel mit Magnetisierung $\mathbf{M}$ lautet

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}. \tag{7}$$

Hinweis: Innerhalb einer homogen magnetisierten Kugel gilt $\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) = 0$. Somit ist das Feld in einer solchen Kugel allein durch die Oberflächenströme bestimmt. Dieser Fall kann beschrieben werden als eine rotierenden Kugel mit konstanter Oberflächenladungsdichte σ und Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Es gilt der Zusammenhang $\mathbf{M} = \sigma R\boldsymbol{\omega}$. Im Inneren einer solchen Kugel mit Radius R lautet das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 R\sigma}{3}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \text{for } |\mathbf{r}| < R. \tag{8}$$

(d) (7 Pkt.) Zeigen Sie, dass das Feld ausserhalb einer homogen magnetisierten Kugel gerade jenem eines Punktdipols am Kugelmittelpunkt entspricht, wie Sie es in Übung 1 kennengelernt haben. Wie lautet das Dipolmoment dieses Dipols?
Hinweis: Wie in der vorhergehenden Teilaufgabe, modellieren wir die homogen magnetisierte Kugel durch eine rotierende Kugel mit Oberflächenladung. Ausserhalb einer solchen Kugel mit Radius R, Winkelgeschwindigkeit ω, und Oberflächenladungsdichte σ lautet das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 R^4\sigma}{3r^3}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \text{for } |\mathbf{r}| > R. \tag{9}$$

Zudem gilt nach wie vor $\mathbf{M} = \sigma R\boldsymbol{\omega}$.

(e) (12 Pkt.) Wir gehen nun davon aus, dass die Kugel von Vakuum umgeben ist und die Magnetisierung der Kugel durch ein äusseres Magnetfeld $\mathbf{H}_{\text{ext}}$ induziert wurde. Die Magnetisierbarkeit des Kugelmaterials sei χ_m. Im Folgenden suchen wir das Magnetfeld innerhalb der Kugel in Anwesenheit eines äusseren Feldes $\mathbf{B}_{\text{ext}}$. Zeigen Sie, dass das Gesamtfeld innerhalb der Kugel lautet

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{3\,\mu}{\mu + 2}\,\boldsymbol{B}_{\text{ext}} \,. \tag{10}$$

Hinweis: Nehmen Sie in erster Näherung an, dass die Magnetisierung der Kugel proportional zum angelegten externen Feld ist laut $\mathbf{M}_0 = \chi_m \mathbf{B}_{\text{ext}}/(\mu_0 \mu)$. Berechnen Sie nun das sich laut Gl. (7) aus dieser Magnetisierung ergebende Magnetfeld $\mathbf{B}_1$ im Inneren der Kugel. Schliessen Sie sodann von diesem Magnetfeld wiederum auf die Magnetisierung $\mathbf{M}_1$, um daraus erneut ein resultierendes Magnetfeld $\mathbf{B}_2$ zu berechnen. Bilden Sie den Grenzwert $\sum_0^N \mathbf{B}_n$ für $N \to \infty$ dieser Iteration, um das Gesamtfeld innerhalb der Kugel $\mathbf{B}_i$ zu finden. Erinnern Sie sich in diesem Zusammenhang an die geometrische Reihe.

(f) (6 Pkt.) Berechnen Sie die Magnetisierung $\mathbf{M}$ der Kugel im Magnetfeld und bestimmen Sie daraus die magnetische Polarisierbarkeit α_m, die definiert ist als $\mathbf{m} = \alpha_m \mathbf{H}_{\text{ext}}$.

Wir widmen uns nun einer Methode zur Bestimmung der Permeabilität μ eines Materials, das zu einer Kugel geformt wurde. Die Kugel werde am Äquator mit einer Induktionsspule mit Windungszahl N versehen. Die Normale zur Spulenfläche sei parallel zum äusseren Feld. Das äussere Feld $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ werde zum Zeitpunkt $t_{\text{off}} = 0$ ausgeschaltet. Integriert man die induzierte Spannung, so erhält man als Messgrösse den Spannungsstoss

$$UT = \int_0^\infty U(t)\,\mathrm{d}t \,. \tag{11}$$

(g) (6 Pkt.) Bringen Sie das Faraday'sche Gesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ in Integralform, um daraus die in der Spule induzierte Spannung $U(t)$ herzuleiten.

(h) (5 Pkt.) Berechnen Sie den Spannungsstoss, der sich nach dem Ausschalten des extern angelegten Magnetfeldes $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ ergibt, als Funktion der Parameter N, R und der Materialkonstanten μ der Kugel.

(i) (3 Pkt.) Leiten Sie einen Ausdruck her für die Permeabilität in Abhängigkeit des Spannungsstosses, der Windungszahl N und des Kugelradius R.

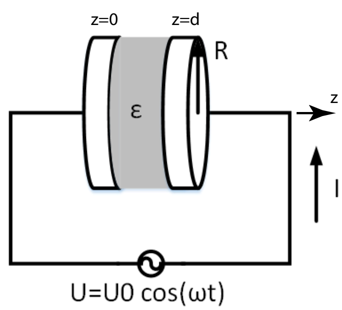
3 Plattenkondensator (30 Pkt.)

Maxwell's genialer Einfall, der die nach ihm benannten Gleichungen der Elektrodynamik komplettierte, bestand in der Hinzufügung des Verschiebungsstromes zum Ampère'schen Gesetz, das somit lautet

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}. \tag{12}$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{j}$ die freie Stromdichte. Wir betrachten im Folgenden einen einfachen Versuchsaufbau zum Test von Maxwell's Gleichung.

An einem Plattenkondensator bestehend aus zwei parallelen, kreisförmigen Platten mit Radius R, gelegen bei $z = 0$ und $z = d$ senkrecht und zentriert zur z-Achse, werde eine Wechselspannung $U = U_0 \cos(\omega t)$ angelegt (siehe Abbildung). Der Plattenkondensator sei mit einem Dielektrikum mit Permittivität ε und Permeabilität $\mu = 1$ gefüllt und besitze die Kapazität C. Mit der aufgrund der angelegten Wechselspannung $U(t)$ variierenden Ladung $Q(t)$ auf den Kondensatorplatten ändert sich auch das elektrische Feld $\mathbf{E}$ zwischen den beiden Platten. Das elektrische Wechselfeld führt zu einer Verschiebung von Polarisationsladungen im Dielektrikum: Es fliesst ein Wechselstrom $I(t)$, der sich aus Verschiebungsstrom und Polarisationsstrom zusammensetzt.



(a) (3 Pkt.) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und das Verschiebungsfeld $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ im Inneren des Plattenkondensators unter Vernachlässigung von Randeffekten durch die endliche Plattengrösse.

(b) (5 Pkt.) Bestimmen Sie die Kapazität des Plattenkondensators als Funktion seiner Fläche A, dem Plattenabstand d, sowie der Permittivität des Mediums ε und der des Vakuums ε_0.

(c) (2 Pkt.) Wie lautet der Strom $I(t)$, der im Stromkreis fliesst, ausgedrückt durch U_0, C und ω?

(d) (7 Pkt.) Berechnen Sie das Magnetfeld $\mathbf{H}(r)$ um den leitenden Draht entlang der z-Achse als Funktion des Abstandes zum Draht r und des Stromes I. Vernachlässigen Sie dazu die Felder, die durch die anderen Drahtteile generiert werden.

(e) (7 Pkt.) Bestimmen Sie das Magnetfeld $\mathbf{H}(r)$ als Funktion von I im Bereich $0 < z < d$ sowohl für Abstände $r < R$ also auch für $r > R$ von der z-Achse. Überzeugen Sie sich, dass die Felder für $r > R$ für die Bereiche $0 < z < d$ und ausserhalb identisch sind.

(f) (3 Pkt.) Laut Maxwell werden Magnetfelder nicht nur von Leitungsströmen sondern auch von zeitlich veränderlichen elektrischen Feldern erzeugt. Unser Bespiel bietet darum eine

Gelegenheit, um Maxwell's Idee experimentell zu verifizieren, indem eine kleine Spule (so dass das Magnetfeld über die Spulenfläche als konstant angenommen werden kann) mit Fläche A und N Windungen am Rand der Kondensatorplatten bei $r = R$ im Bereich $0 < z < d$ platziert wird. Die Flächennormale der Spule sei parallel zum Magnetfeld und die Umgebung sei Vakuum ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$). Welche induzierte Wechselspannung U_{ind} erwarten Sie in der Spule?

(g) (3 Pkt.) Zeigen Sie, dass durch den Wechselstrom die Ladungserhaltung gewährleistet ist. Leiten Sie dazu aus Gl. (12) und dem Gauss'schen Gesetz für das Verschiebungsfeld $\mathbf{D}$ die Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial_t \rho$ her.