Übung 1

Abgabe: 01.03. bzw. 05.03.2019

Elektromagnetische Felder und Wellen
Frühjahrssemester 2019
Photonics Laboratory, ETH Zürich
www.photonics.ethz.ch

Elektro- und Magnetostatik

In dieser Übung befassen wir uns mit den Grundlagen der Elektro- und Magnetostatik. In der ersten Aufgabe erinnern wir uns an einige mathematische Werkzeuge, insbesondere der Vektoranalysis, deren Beherrschung für diese Vorlesung unabdinglich sind. Die zweite Aufgabe befasst sich mit einem fundamentalen Problem der Magnetostatik, dem Magnetfeld einer von einem zeitlich konstanten Strom durchflossenen Leiterschleife. In der dritten Aufgabe widmen wir uns dem Potential einer elektrisch homogen geladenen Kreisscheibe. In den beiden letzten Aufgaben üben wir insbesondere den Umgang mit verschiedenen Koordinatensystemen.

1 Mathematische Grundlagen (20 Pkt.)

(a) (5 Pkt.) Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld $\mathbf{V} = (x^2 + z, x - y, yz)^T$ und die Fläche, die durch die Parabel $y + x^2 = 4$ und die x-Achse berandet wird.

(b) (5 Pkt.) Verifizieren Sie den Satz von Gauss für das Vektorfeld $\mathbf{F} = (ax^2, by^2, cz^2)^T$ und das Volumen $V = \{\mathbf{r} : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.
Hinweis: Symmetrien und Periodizitäten der zu integrierenden Funktionen sollten Ihre Rechnungen erleichtern.

(c) (2 Pkt.) Beweisen Sie, dass Rotationsfelder (hinreichend oft partiell differenzierbarer Funktionen) stets divergenzfrei sind.

(d) (2 Pkt.) Beweisen Sie, dass Gradientenfelder (hinreichend oft partiell differenzierbarer Funktionen) stets rotationsfrei sind.

(e) (3 Pkt.) Formulieren Sie die allgemeine *komplexe* Lösung der homogenen Differentialgleichung

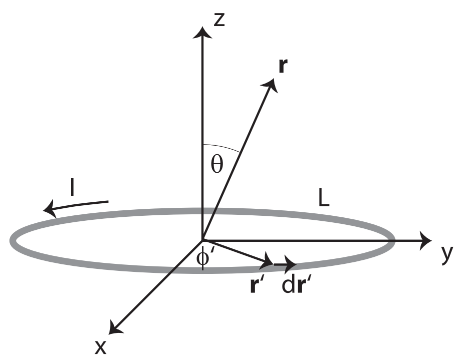
$$(\partial_x^2 + k^2) f(x) = 0, \tag{1}$$

mit $k \in \mathbb{R}$.

(f) (3 Pkt.) Zeigen Sie, dass (für $A = a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$) gilt $\mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}) = c\cos(kx + \phi)$ (mit $c, \phi \in \mathbb{R}$). Bestimmen Sie $c(a, b)$ und $\phi(a, b)$.

2 Der statische magnetische Dipol (50 Pkt.)

In dieser Aufgabe betrachten wir das magnetische Feld, das durch eine runde Leiterschleife mit Radius L, gelegen um den Ursprung in der Ebene $z = 0$, generiert wird. Wir leiten einen analytischen Ausdruck für das Feld in einem beliebigen Punkt her, die Auswertung des erscheinenden Integrals werden wir jedoch einer numerischen Methode überlassen müssen. Als Fall von grosser praktischer Bedeutung betrachten wir das generierte Feld in grossem Abstand von der Leiterschleife, aus dem diese wie ein magnetischer Punktdipol erscheint.



Wir beginnen mit dem Biot-Savart Gesetz, welches das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ am Orte $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ beschreibt, das von einem zeitlich konstanten Strom I entlang des Pfades C generiert wird

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\mathrm{d}\mathbf{r'} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}, \qquad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r'}. \tag{2}$$

(a) (4 Pkt.) Formulieren Sie zunächst den Ortsvektor zum stromführenden Draht $\mathbf{r'}$ sowie das Pfadelement $\mathrm{d}\mathbf{r'}$ unter Verwendung des Radius L und der Koordinate ϕ'.

(b) (4 Pkt.) Berechnen Sie den Betrag des Abstandsvektors $|\mathbf{R}|$.

(c) (5 Pkt.) Evaluieren Sie das Kreuzprodukt $\mathrm{d}\mathbf{r'} \times \mathbf{R}$ und formulieren Sie einen Ausdruck für das Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Eine allgemeine Auswertung des Integrals ist nicht erforderlich und lediglich numerisch möglich.

(d) (5 Pkt.) Wir betrachten im Folgenden das Feld in grossem Abstand von der Leiterschleife. In diesem Limit repräsentiert die Schleife einen magnetischen Punktdipol. Entwickeln Sie zunächst den Ausdruck $1/R^3$ in führender Ordnung in L.

(e) (12 Pkt.) Evaluieren Sie nun das Magnetfeld $\mathbf{B}(x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten, indem Sie das in Aufgabe (c) formulierte Integral in führender Ordnung in L auswerten.

(f) (10 Pkt.) Zeigen Sie, dass das Magnetfeld des Dipols mit Dipolmoment $m = \pi L^2 I$ in sphärischen Koordinaten lautet

$$B_r = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \cos\theta, \tag{3}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin\theta, \tag{4}$$

$$B_\phi = 0, \tag{5}$$

wobei der Polarwinkel θ wie üblich zur z-Achse und der Azimuthalwinkel zur x-Achse gemessen wird. Bemühen Sie für die Transformation der Einheitsvektoren falls notwendig ein geeignetes Nachschlagewerk.

(g) (4 Pkt.) Vergewissern Sie sich durch explizite Rechnung, dass das Magnetfeld des Dipols die Maxwell'sche Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ erfüllt. Verwenden Sie hierzu den Divergenzoperator in Kugelkoordinaten, den Sie an geeigneter Stelle nachschlagen können.

(h) (6 Pkt.) Da die Divergenz jedes Rotationsfeldes verschwindet (s. erste Aufgabe), existiert ein Vektorpotential $\mathbf{A}$ mit der Eigenschaft $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Das Vektorpotential eines statischen magnetischen Punktdipols mit Dipolmoment $\mathbf{m}$ lautet

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}. \tag{6}$$

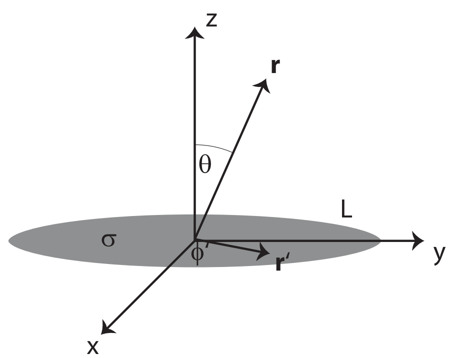
Überprüfen Sie mithilfe des Vektorpotentials Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe (e).

3 Potential einer geladenen Scheibe (30 Pkt.)

Wir berechnen in dieser Aufgabe das elektrostatische Potential einer homogen elektrisch geladenen Scheibe. Die Scheibe befinde sich in der Ebene $z = 0$, habe den Radius L und trage die Flächenladungsdichte σ. Laut dem Coulomb'schen Gesetz gilt für das Potential einer Ladungsdichteverteilung $\rho(\mathbf{r})$ mit endlicher Ausdehnung

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho \, \mathrm{d}V'}{R}, \tag{7}$$

wobei der Beobachtungspunkt hier in Zylinderkoordinaten beschrieben sei durch $\mathbf{r} = (x, y, z)^T = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)^T$ und der zu integrierende Ortsvektor durch $\mathbf{r'} = (x', y', z')^T = (r'\cos\varphi', r'\sin\varphi', z')^T$. Für den Abstandsvektor gilt somit $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r'}|$.



(a) (4 Pkt.) Berechnen Sie die Länge des Abstandsvektors $|\mathbf{R}|$.

(b) (2 Pkt.) Formulieren Sie das Potential ϕ. Eine Auswertung des Integrals ist nicht erforderlich.

(c) (3 Pkt.) Berechnen Sie das Potential entlang der z-Achse.
Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Substitution zum Lösen des Integrals.

(d) (5 Pkt.) Wir nähern nun das Potential an einem beliebigen Raumpunkt für grosse Abstände im Vergleich zur Scheibengrösse. Entwickeln Sie dazu die inverse Länge des Abstandsvektors $1/|\mathbf{R}|$ in quadratischer Ordnung in r'. Verwenden Sie den Parameter $d = \sqrt{r^2 + z^2}$ um Ihre Notation zu erleichtern.

(e) (6 Pkt.) Berechnen Sie das Potential an einem beliebigen Raumpunkt bis zur zweiten nichtverschwindenden Ordnung in der Scheibengrösse L.

(f) (3 Pkt.) Extrahieren Sie aus dem soeben berechneten Potential das elektrische Feld in sphärischen Koordinaten. Verwenden Sie dazu den entsprechenden Operator in Kugelkoordinaten.

(g) (4 Pkt.) Vergewissern Sie sich, dass Ihr Ausdruck für das Potential entlang der z-Achse aus Teilaufgabe (c) in zweiter nichtverschwindender Ordnung in der Scheibengrösse mit Ihrem Ergebnis für das Potential an einem beliebigen Raumpunkt (e) übereinstimmt.

(h) (3 Pkt.) Überzeugen Sie sich, dass das Potential der geladenen Scheibe in Abständen viel grösser als der Scheibendurchmesser gerade dem Potential einer Punktladung am Ursprung entspricht. Berechnen Sie die Ladung Q dieser äquivalenten Punktladung.