

Fahrplan

- Wiederholung:
Felder des monochromatischen elektrischen Dipols
- Strahlungsleistung des Dipols
- Abstrahlcharakteristik des Dipols
- Strahlungsleistung in beliebiger Umgebung

Die dyadische Green'sche Funktion

Elektrisches Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu_0 \mu \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{p}$$

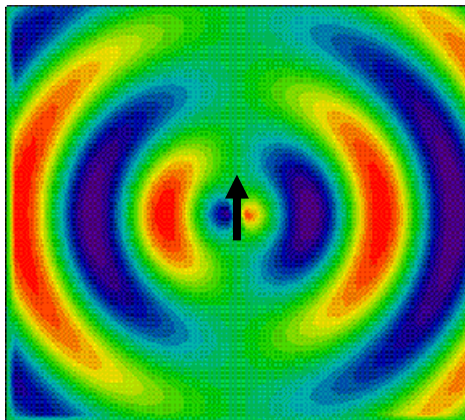
Magnetisches Feld:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega \left[\nabla \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \mathbf{p}$$

In kartesischen Koordinaten:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o) = \frac{\exp(ikR)}{4\pi R} \left[\left(1 + \frac{ikR - 1}{k^2 R^2} \right) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + \frac{3 - 3ikR - k^2 R^2}{k^2 R^2} \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right]$$

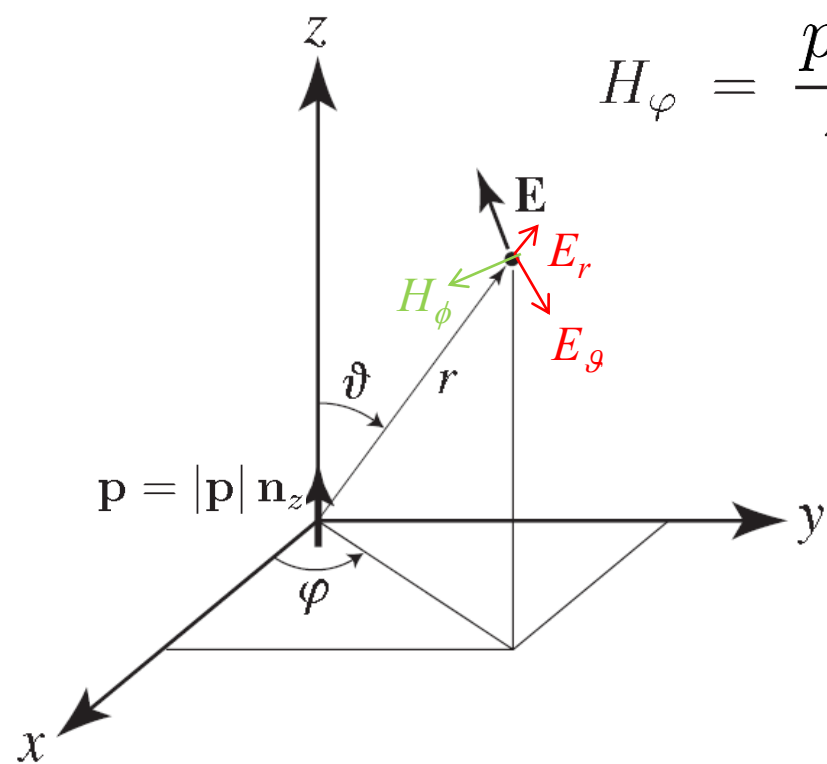
Dipol-Strahlung für z-orientierten Dipol



$$E_r = \frac{p_z \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\overset{\text{NF}}{\frac{2}{k^2 r^2}} - \overset{\text{IF}}{\frac{2i}{kr}} \right],$$

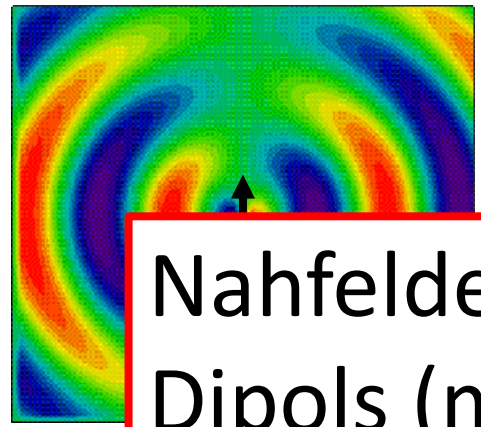
$$E_\vartheta = \frac{p_z \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\overset{\text{NF}}{\frac{1}{k^2 r^2}} - \overset{\text{IF}}{\frac{i}{kr}} - \overset{\text{FF}}{1} \right],$$

$$H_\varphi = \frac{p_z \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\overset{\text{IF}}{-\frac{i}{kr}} - \overset{\text{FF}}{1} \right] \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}}$$



- NB:
- Magnetfeld hat keinen Nahfeldterm
 - Fernfelder sind transversal
 - Zwischenfeld ist 90° ausser Phase mit Nah- und Fernfeld

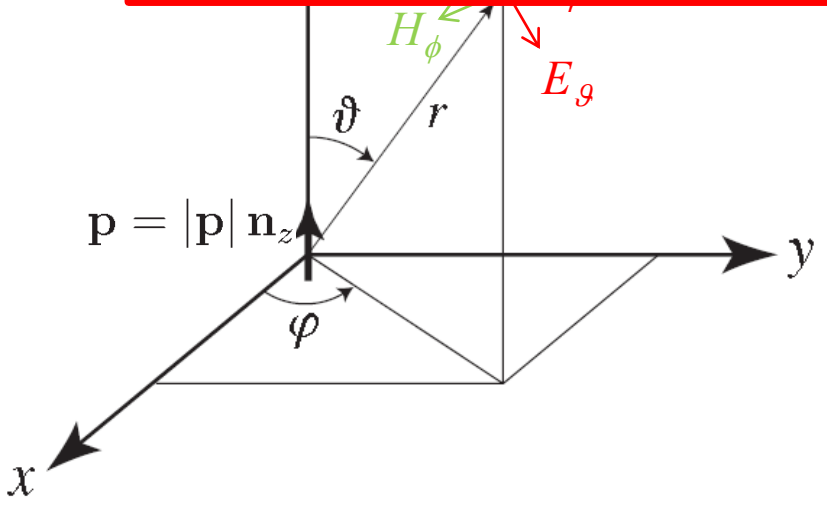
Dipol-Strahlung für z-orientierten Dipol



$$E_r = \frac{p_z \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\overset{\text{NF}}{\frac{2}{k^2 r^2}} - \overset{\text{IF}}{\frac{2i}{kr}} \right],$$

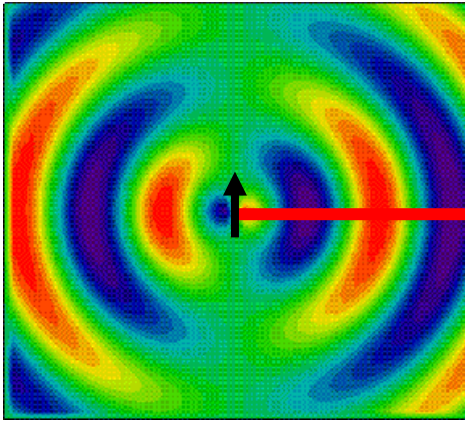
Nahfelder: Felder des statischen Dipols (multipliziert mit zeitharmonischem Phasenfaktor).
 Fernfelder: lokal ebene Wellen

$$\left[\overset{\text{NF}}{1} - \overset{\text{IF}}{i} - \overset{\text{FF}}{\frac{1}{\sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}}}} \right],$$

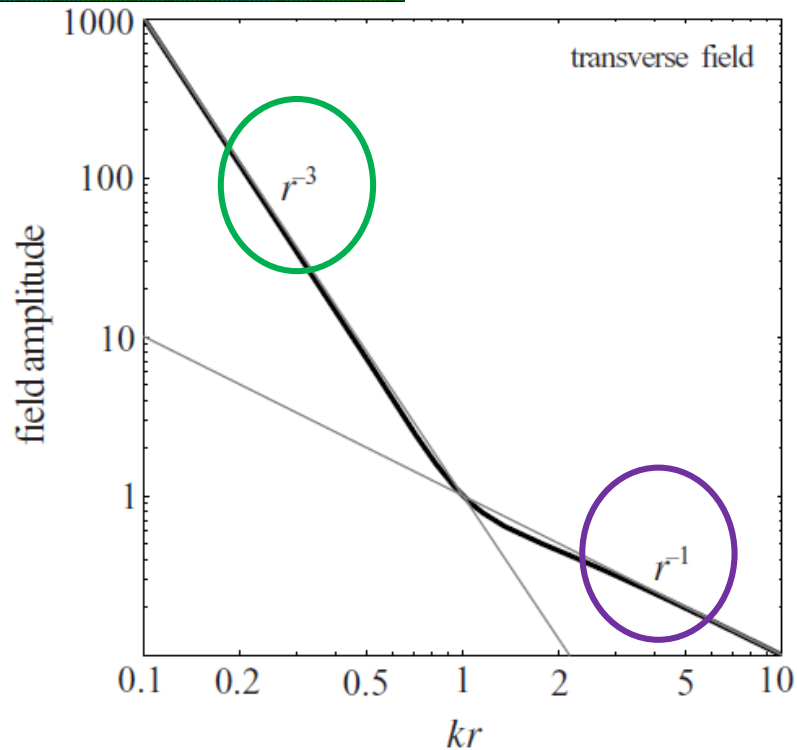


- NB:
- Magnetfeld hat keinen Nahfeldterm
 - Fernfelder sind transversal
 - Zwischenfeld ist 90° ausser Phase mit Nah- und Fernfeld

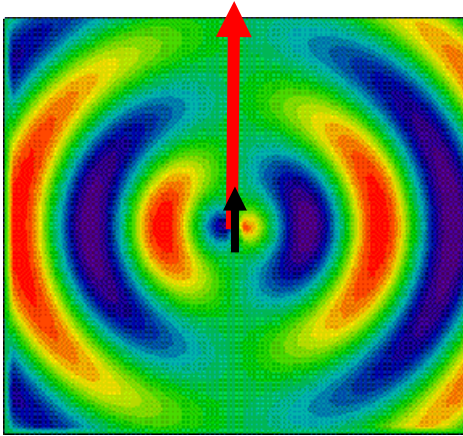
Abstandsabhängigkeit der Dipol-Strahlung



$$E_{\vartheta} = \frac{p_z \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\overset{\text{NF}}{\frac{1}{k^2 r^2}} - \frac{\overset{\text{IF}}{i}}{kr} \overset{\text{FF}}{-1} \right],$$

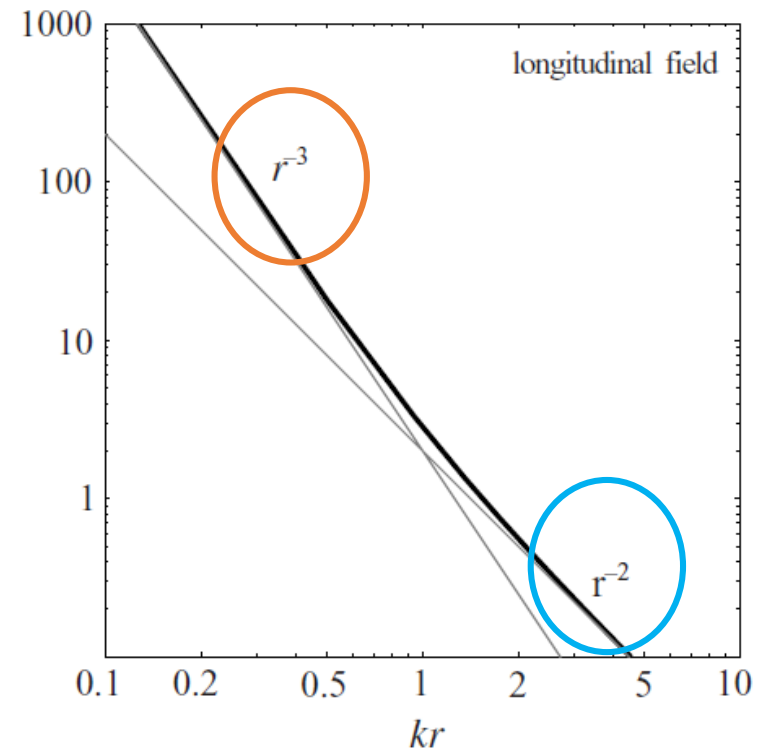
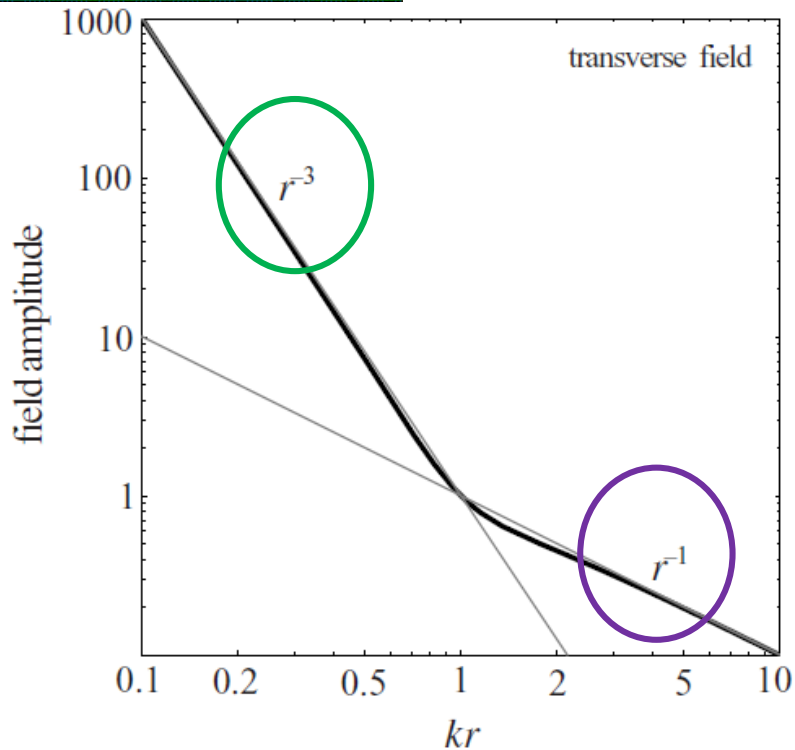


Abstandsabhängigkeit der Dipol-Strahlung

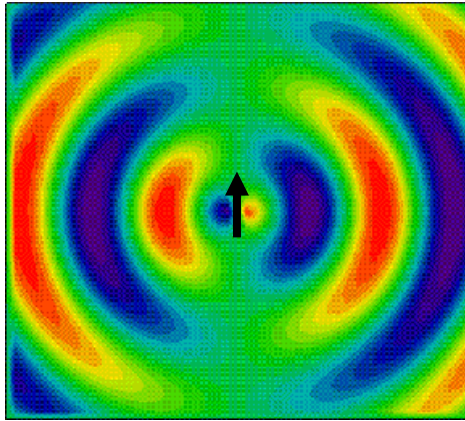


$$E_r = \frac{p_z \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\overset{\text{NF}}{\frac{2}{k^2 r^2}} - \overset{\text{IF}}{\frac{2i}{kr}} \right],$$

$$E_\vartheta = \frac{p_z \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\overset{\text{NF}}{\frac{1}{k^2 r^2}} - \overset{\text{IF}}{\frac{i}{kr}} \overset{\text{FF}}{-1} \right],$$



Abstandsabhängigkeit der Dipol-Strahlung

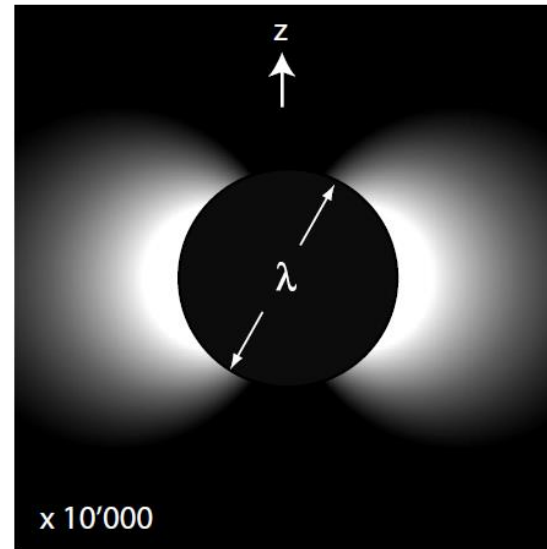
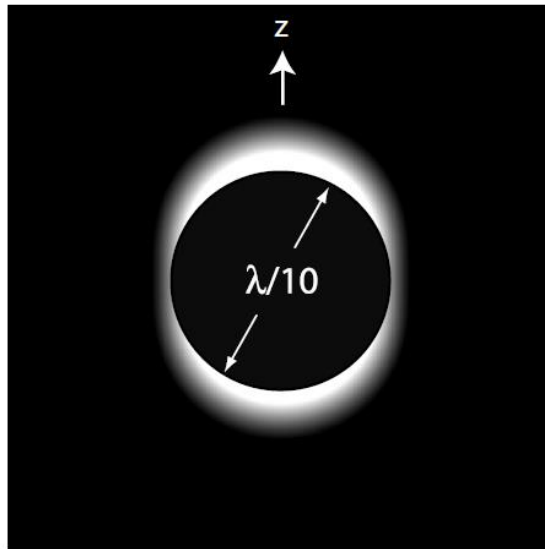


$$E_r = \frac{p_z \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\overset{\text{NF}}{\frac{2}{k^2 r^2}} - \overset{\text{IF}}{\frac{2i}{kr}} \right],$$

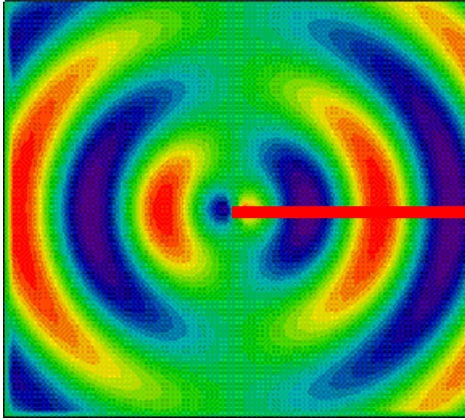
$$E_\vartheta = \frac{p_z \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\overset{\text{NF}}{\frac{1}{k^2 r^2}} - \overset{\text{IF}}{\frac{i}{kr}} \overset{\text{FF}}{-1} \right],$$

Achtung: Hier ist das H-Feld illustriert!

Zeitgemittelte Energiedichte:

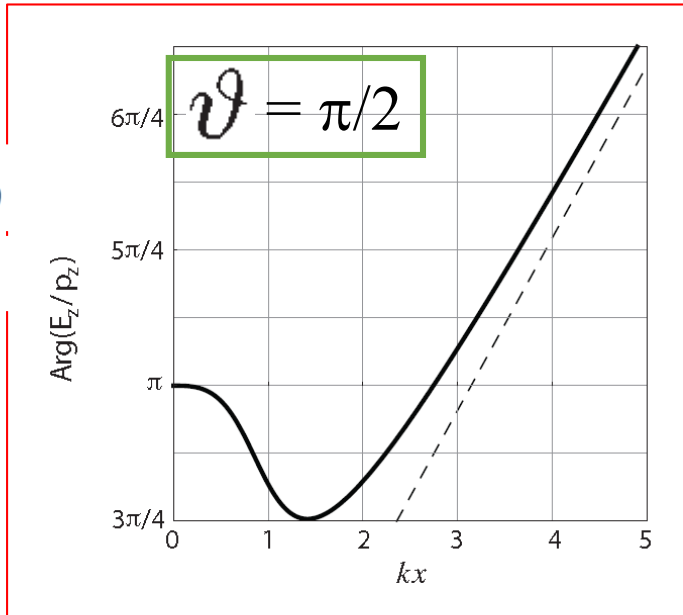


Phase des Dipolfeldes – transversal



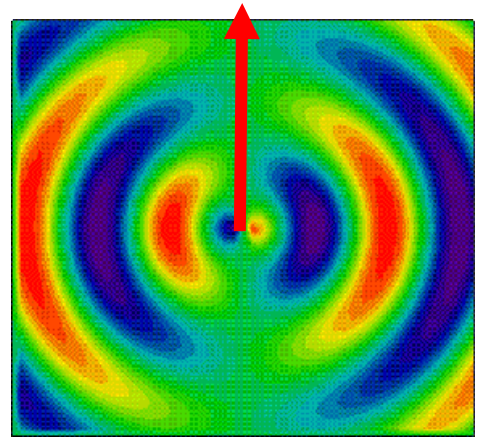
$$E_{\vartheta} = \frac{p_z \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\overset{\text{NF}}{\frac{1}{k^2 r^2}} - \frac{\overset{\text{IF}}{i}}{kr} \overset{\text{FF}}{-1} \right],$$

$$E_z = -E_{\theta} \text{ at } \theta = \pi/2$$



$$k = 2\pi/\lambda$$

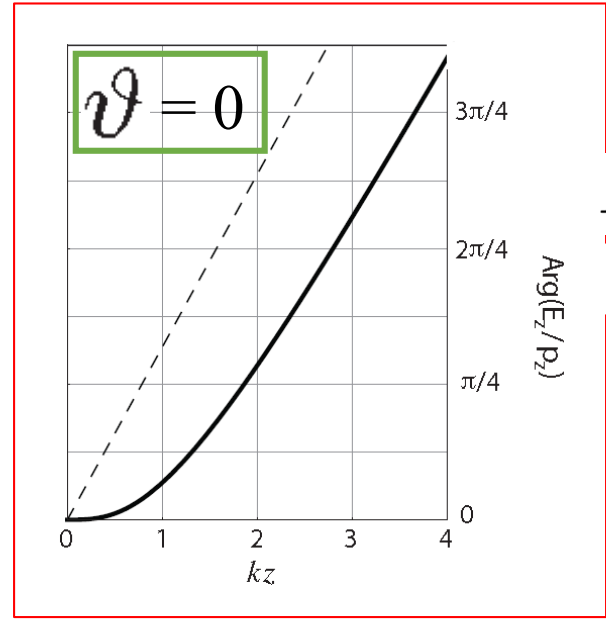
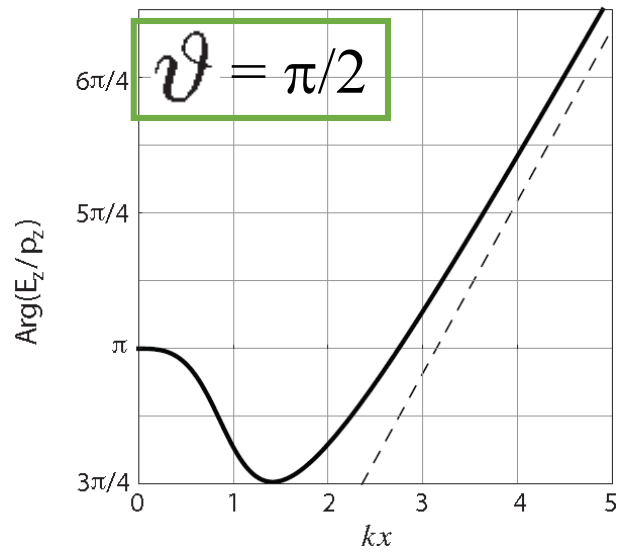
Phase des Dipolfeldes – longitudinal



$$E_r = \frac{p_z \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\frac{2}{k^2 r^2} - \frac{2i}{kr} \right],$$

$$E_\vartheta = \frac{p_z \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\frac{1}{k^2 r^2} - \frac{i}{kr} - 1 \right],$$

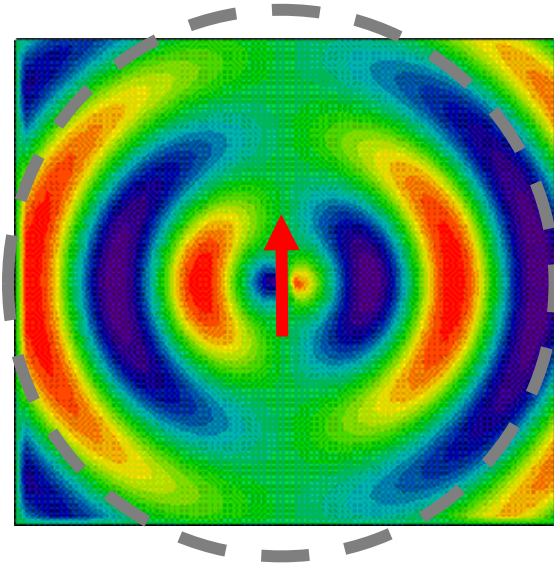
$E_z = -E_\theta$
at $\theta = \pi/2$



$E_z = E_r$
at $\theta = 0$

$k = 2\pi/\lambda$

Abgestrahlte Leistung des Dipols

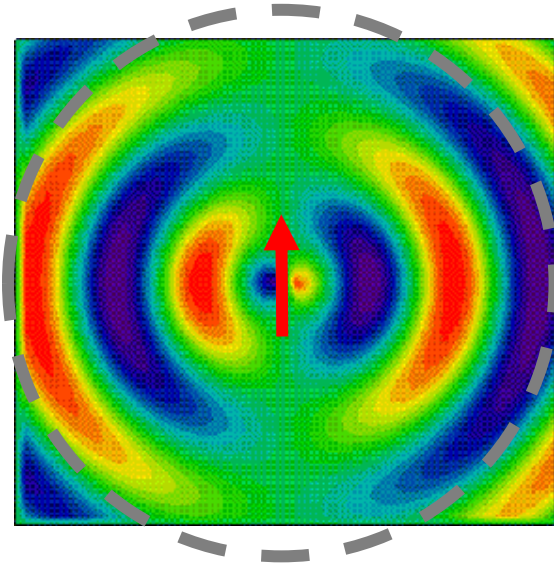


$$E_{\vartheta} = \frac{p_z \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\frac{1}{k^2 r^2} - \frac{i}{kr} - 1 \right],$$

$$H_{\varphi} = \frac{p_z \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[-\frac{i}{kr} - 1 \right] \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}}$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \}$$

Abgestrahlte Leistung des Dipols



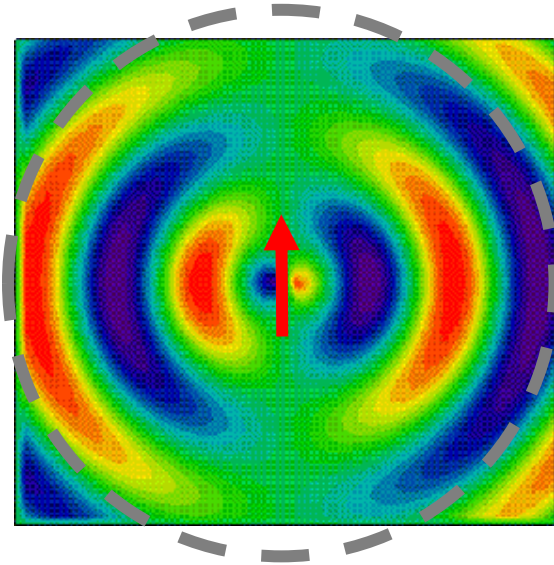
$$E_{\vartheta} = \frac{p_z \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\frac{1}{k^2 r^2} - \frac{i}{kr} \boxed{-1} \right],$$

$$H_{\varphi} = \frac{p_z \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[-\frac{i}{kr} \boxed{-1} \right] \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}}$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \}$$

Integriere Poynting-Vektor über Kugel mit Radius $r \gg \lambda$

Abgestrahlte Leistung des Dipols



$$E_{\vartheta} = \frac{p_z \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\frac{1}{k^2 r^2} - \frac{i}{kr} \boxed{-1} \right],$$

$$H_{\varphi} = \frac{p_z \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[-\frac{i}{kr} \boxed{-1} \right] \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}}$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \}$$

Integriere Poynting-Vektor über Kugel mit Radius $r \gg \lambda$

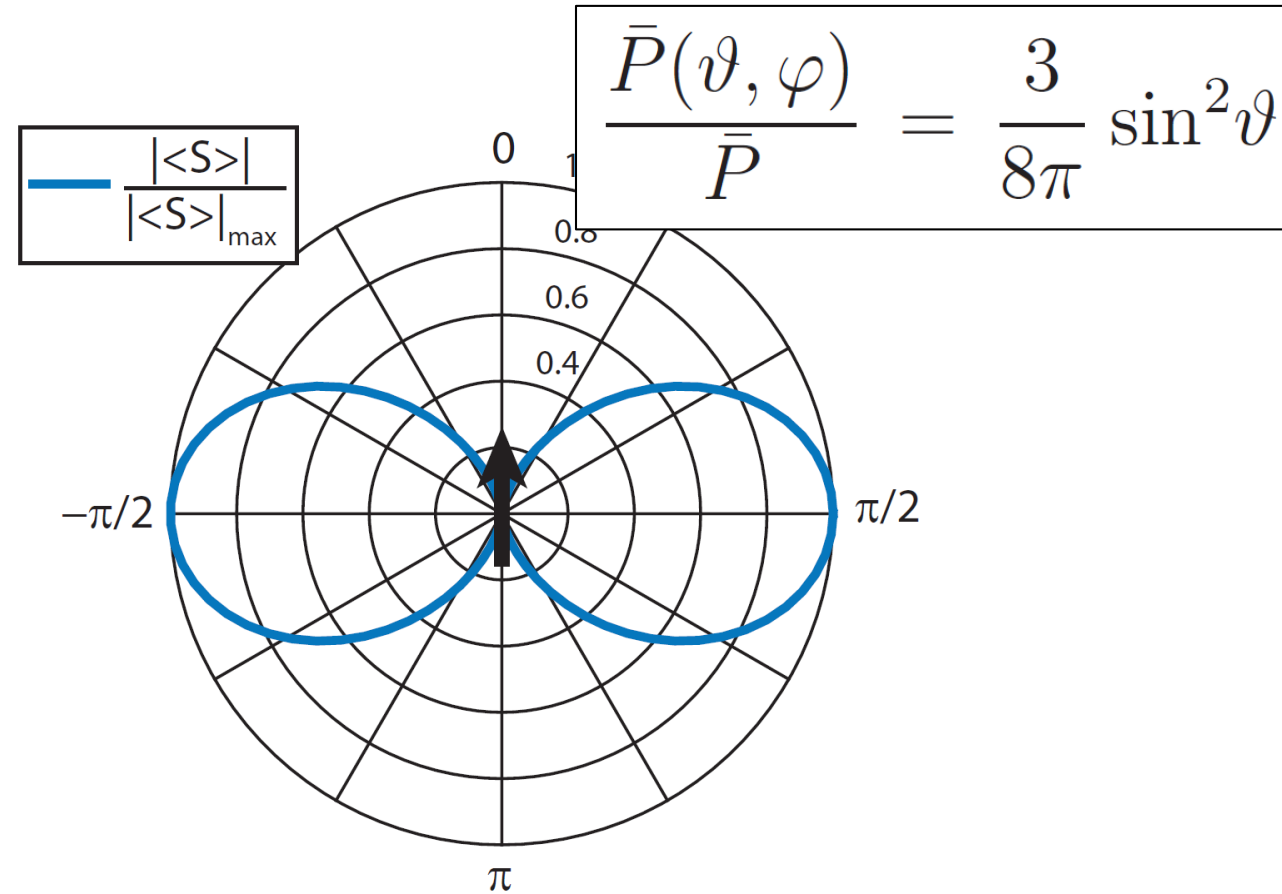
Abgestrahlte Leistung (Zeitmittel):

$$\bar{P} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{n^3 \omega^4}{3c^3} = \frac{|\mathbf{p}|^2 \omega k^3}{12\pi\epsilon_0\epsilon}$$

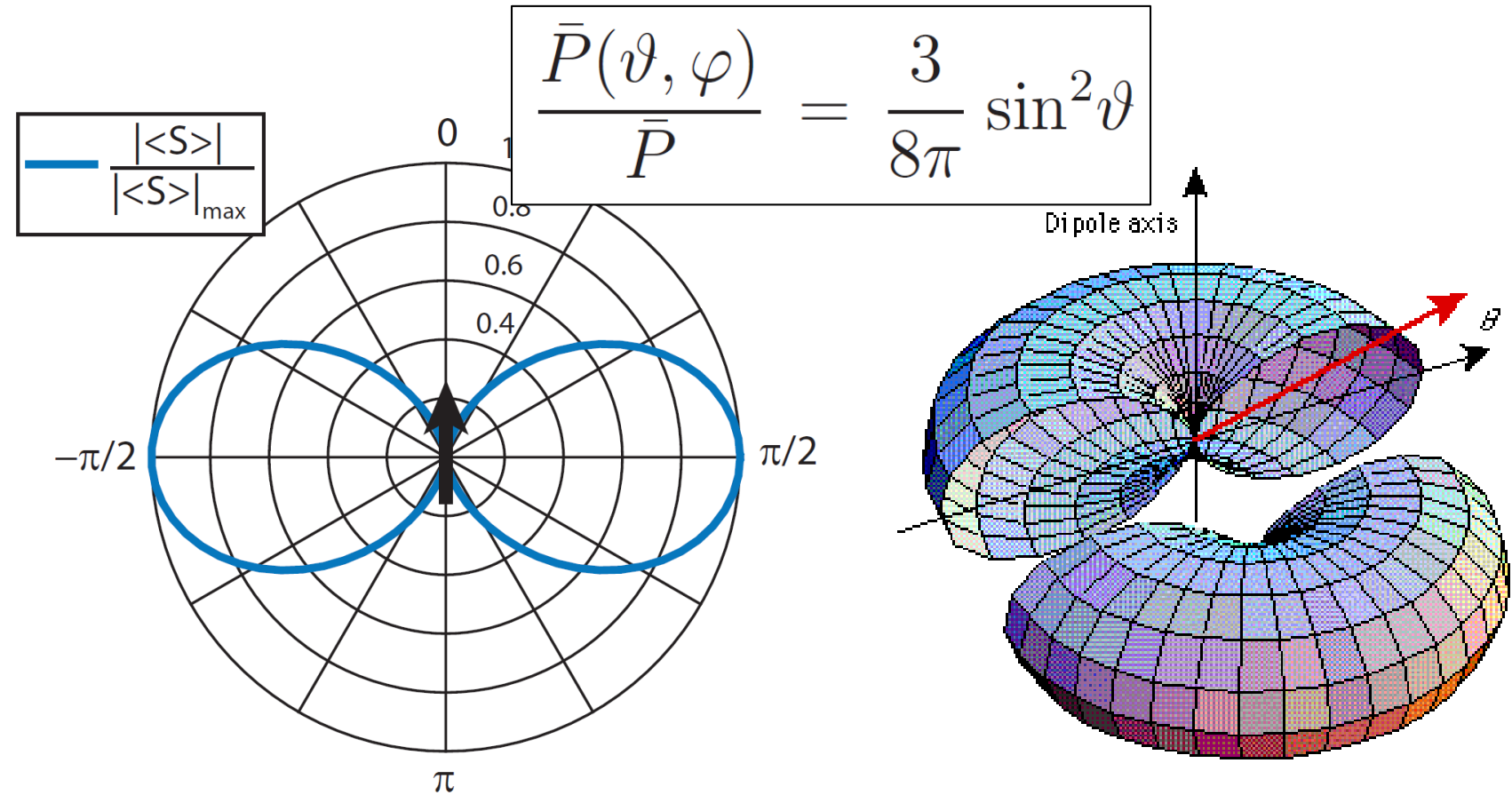
Abstrahlcharakteristik des Dipols

Wohin strahlt der Dipol?

Abstrahlcharakteristik des Dipols

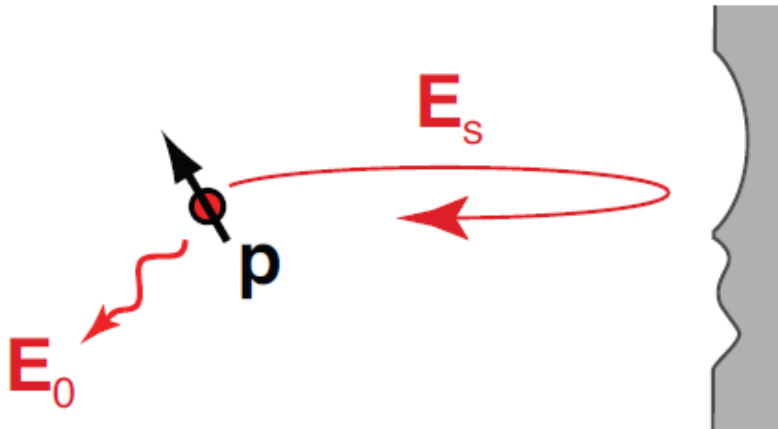


Abstrahlcharakteristik des Dipols



Abgestrahlte Leistung in inhomogener Umgebung

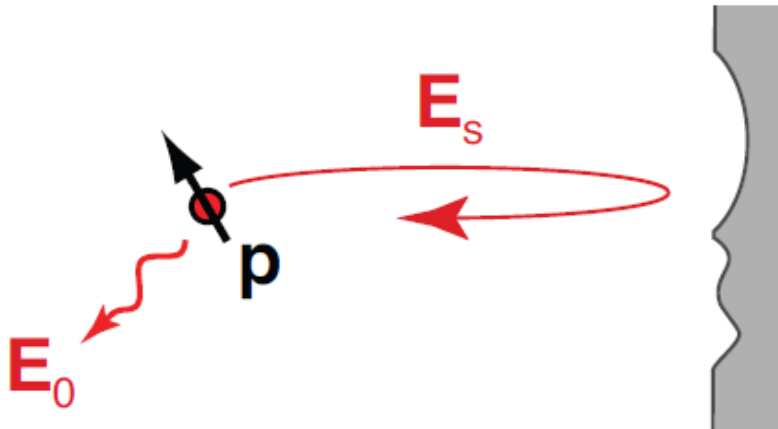
Bislang war der Dipol in einem (unendlich ausgedehnten) homogenen Medium!



Wie können wir die abgestrahlte Leistung in einer beliebigen Umgebung berechnen?

$$P = \int_{\partial S} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{n}_r \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \quad ?$$

Abgestrahlte Leistung in inhomogener Umgebung



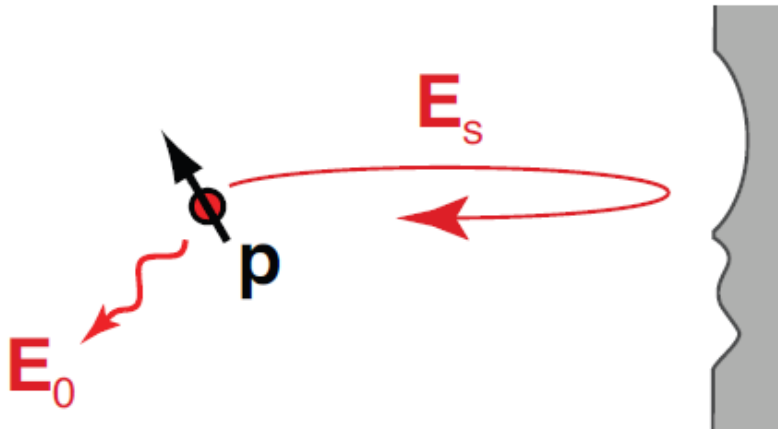
Wie können wir die abgestrahlte Leistung in einer beliebigen Umgebung berechnen?

$$P = \int_{\partial S} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{n}_r \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \quad ?$$

Wir könnten

- eine grosse Kugel um das ganze System spannen
 - eine kleine Kugel nur um die Quelle spannen
- und den Poynting Vektor integrieren.

Abgestrahlte Leistung in inhomogener Umgebung



Wie können wir die abgestrahlte Leistung in einer beliebigen Umgebung berechnen?

$$P = \int_{\partial S} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{n}_r \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \quad ?$$

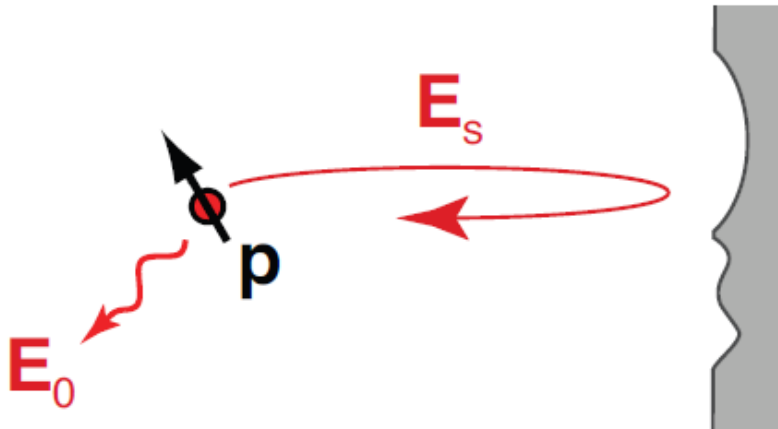
Wir könnten

- eine grosse Kugel um das ganze System spannen
- eine kleine Kugel nur um die Quelle spannen

und den Poynting Vektor integrieren.

Beide Ansätze sind aufwendig (Integration) oder gar unmöglich (z.B. absorbierende Medien)

Abgestrahlte Leistung in inhomogener Umgebung



Wie können wir die abgestrahlte Leistung in einer beliebigen Umgebung berechnen?

$$P = \int_{\partial S} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{n}_r \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \quad ?$$

Wir könnten

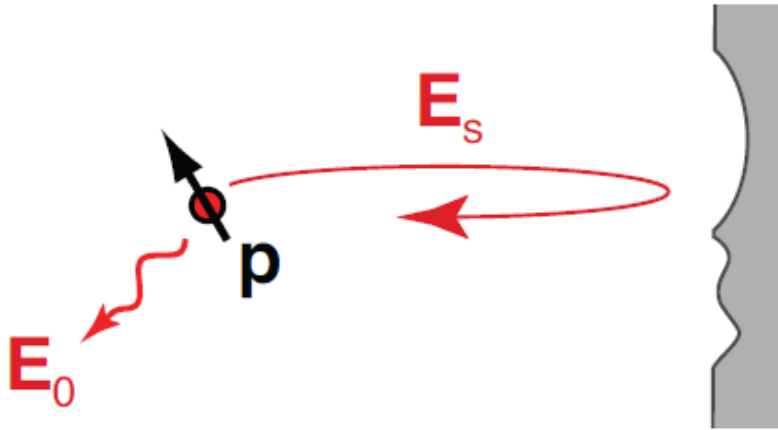
- eine große Kugel um die Quader spannen
- eine kleine Kugel um die Quader spannen

Geht es auch anders?

und den Poynting Vektor integrieren.

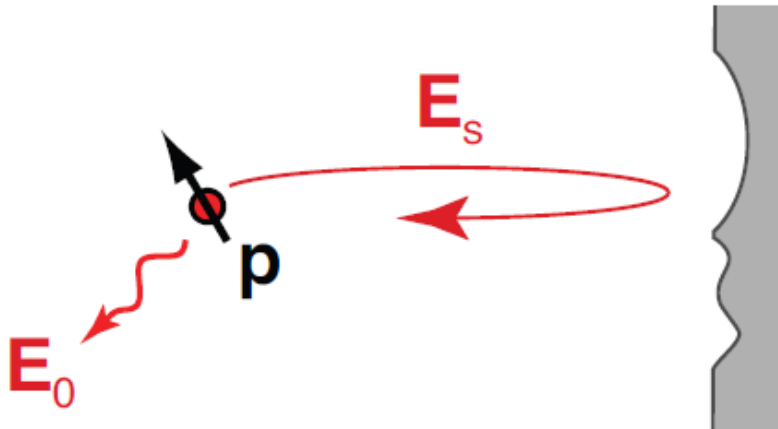
Beide Ansätze sind aufwendig (Integration) oder gar unmöglich (z.B. absorbierende Medien)

Abgestrahlte Leistung in inhomogener Umgebung



Berechne Leistung, die notwendig ist, um den Strom j gegen sein eigenes Feld am Laufen zu halten.

Abgestrahlte Leistung in inhomogener Umgebung



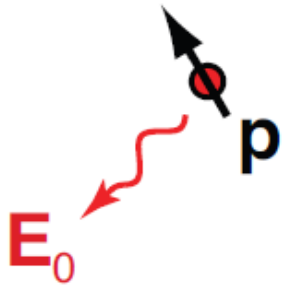
Berechne Leistung, die notwendig ist, um den Strom \mathbf{j} gegen sein eigenes Feld am Laufen zu halten.

$$P = \frac{dW}{dt} = \int dV (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$$

$$\bar{P} = \frac{\omega}{2} \text{Im} \{ \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \}$$

Wir benötigen lediglich das Feld am Ort des Dipols!

Beispiel: homogene Umgebung



Imaginärteil des elektrischen Dipolfeldes
am Ursprung:

$$E_r = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\frac{2}{k^2 r^2} - \frac{2i}{kr} \right]$$

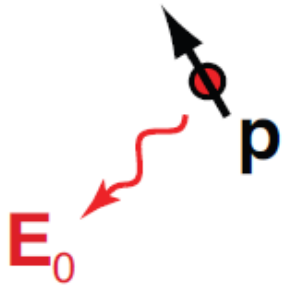
$$\text{Im}\{E_r(\mathbf{r} \rightarrow 0, \theta = 0)\} =$$



$$P = \frac{dW}{dt} = \int dV (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$$

$$\bar{P} = \frac{\omega}{2} \text{Im} \{ \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \}$$

Beispiel: homogene Umgebung



Imaginärteil des elektrischen Dipolfeldes
am Ursprung:

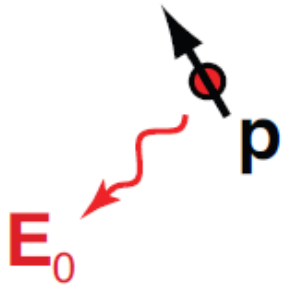
$$E_r = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\frac{2}{k^2 r^2} - \frac{2i}{kr} \right]$$

$$\text{Im}\{E_r(\mathbf{r} \rightarrow 0, \theta = 0)\} = \frac{2}{3} \frac{k^3}{4\pi\epsilon\epsilon_0} p$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \int dV (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$$

$$\bar{P} = \frac{\omega}{2} \text{Im} \{ \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \}$$

Beispiel: homogene Umgebung



Imaginärteil des elektrischen Dipolfeldes am Ursprung:

$$E_r = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\frac{2}{k^2 r^2} - \frac{2i}{kr} \right]$$

$$\text{Im}\{E_r(\mathbf{r} \rightarrow 0, \theta = 0)\} = \frac{2}{3} \frac{k^3}{4\pi\epsilon\epsilon_0} p$$

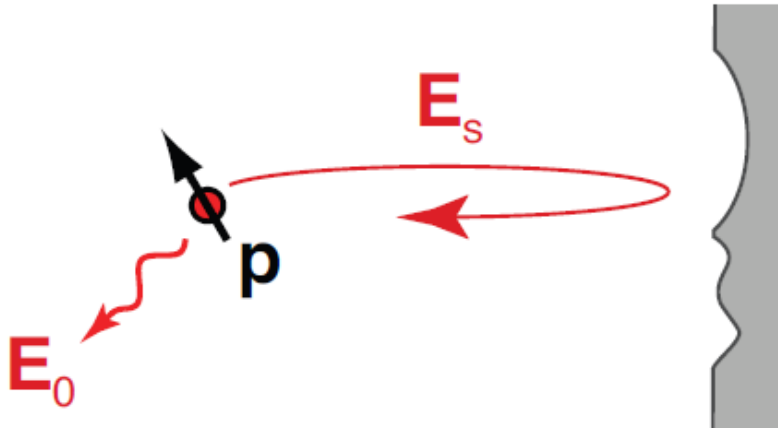
$$P = \frac{dW}{dt} = \int dV (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$$

$$\bar{P} = \frac{\omega}{2} \text{Im} \{ \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \}$$

Wir erhalten dasselbe Resultat wie durch Integration des Poynting/Vektors:

$$\bar{P}_0 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{12\pi} \frac{\omega}{\epsilon_0\epsilon} k^3$$

Abgestrahlte Leistung in inhomogener Umgebung



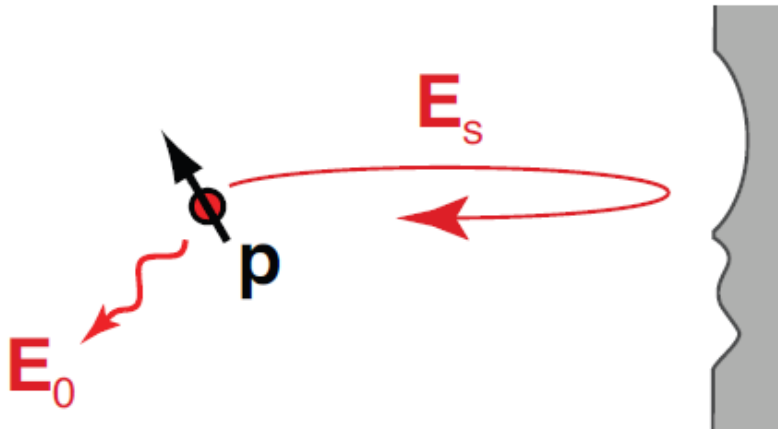
Normierte Abstrahlleistung:

$$\bar{P} = \frac{\omega}{2} \text{Im} \{ \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \}$$

Spalte Feld in Dipolfeld im freien Raum und gestreuten Anteil

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s$$

Abgestrahlte Leistung in inhomogener Umgebung



Normierte Abstrahlleistung:

$$\bar{P} = \frac{\omega}{2} \text{Im} \{ \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \}$$

Spalte Feld in Dipolfeld im freien Raum und gestreuten Anteil

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s$$

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_0} = 1 + \frac{6\pi\epsilon_0\epsilon}{|\mathbf{p}|^2} \frac{1}{k^3} \text{Im} \{ \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}_s(\mathbf{r}_0) \}$$

- Abgestrahlte Leistung hängt von Umgebung des Dipols ab!
- Gestreutes Feld kehrt zum Dipol zurück und tut mehr / weniger Arbeit am Dipolstrom (Interferenz).
- Umgebung bildet Strahlungswiderstand

Fahrplan

- Wiederholung:
Felder des monochromatischen elektrischen Dipols
- Strahlungsleistung des Dipols
- Abstrahlcharakteristik des Dipols
- Strahlungsleistung in beliebiger Umgebung